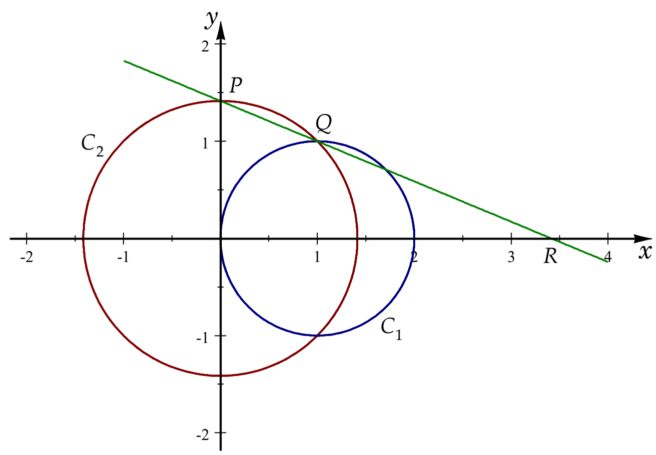
PROBLEMA RESUELTO 7

En la figura se muestra un círculo fijo C_1 con ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y un círculo C_2 con centro en el origen y radio r que se está contrayendo. P es el punto con coordenadas $(0,r)$, Q es el punto en el primer cuadrante donde se intersectan los círculos y R es el punto $(a,0)$, en donde la recta que pasa por los puntos P y Q corta al eje . ¿Que le sucede al punto R al contraerse C_2, es decir, cuando $r \to 0^+$?



Solución

Primero encontremos las coordenadas del punto de intersección de los círculos en términos del radio del círculo que se contrae r. Como la ecuación de éste círculo es $x^2 + y^2 = r^2$, se tiene que $y^2 = r^2 - x^2$. Despejando y^2 en la ecuación del circulo C_1 se tiene $y^2 = 1-(1-x)^2$. Ahora podemos igualar las ecuaciones y despejar x en términos de r para obtener el punto de intersección

$$\begin{aligned} r^2 - x^2 &= 1-(1-x)^2 \\ r^2 - x^2 &= 1 - x^2 + 2x - 1 \\ r^2 &= 2x \\ x &= \frac{r^2}{2} \end{aligned}$$

Ya hemos obtenido la coordenada x del punto de intersección. Para obtener el valor de y evaluamos en la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = r^2$, obteniendo

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{r^2 - x^2} \\ &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{r^2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4r^2 - r^4}{4}} = \frac{\sqrt{r^2(4-r^2)}}{2} = \frac{r\sqrt{4-r^2}}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto Q, donde se intersecan los dos círculos son

$$\left(\frac{r^2}{2}, \frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}\right)$$

Ahora podemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q. La pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2} - r}{\frac{r^2}{2} - 0} = \frac{r\sqrt{4-r^2} - 2r}{r^2} = \frac{r\left(\sqrt{4-r^2} - 2\right)}{r^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4-r^2} - 2}{r}$$

Usando la fórmula punto pendiente para encontrar la ecuación de la recta se tiene

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - r = \frac{\sqrt{4-r^2} - 2}{r}\left(x - 0\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{4-r^2} - 2}{r} x + r$$

Para encontrar el punto R donde la recta corta al eje x hacemos $y = 0$ y despejamos x

$$0 = \frac{\sqrt{4-r^2} - 2}{r} x + r$$

$$\frac{\sqrt{4-r^2} - 2}{r} x = -r$$

$$x = \frac{-r^2}{\sqrt{4-r^2} - 2}$$

Es decir que las coordenadas del punto R son

$$(a, 0) = \left(\frac{-r^2}{\sqrt{4-r^2} - 2}, 0\right)$$

Finalmente, calculando el límite cuando $r \to 0^+$ sabremos que le pasa al punto R y tendremos resuelto nuestro problema

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{-r^2}{\sqrt{4-r^2} - 2} = \lim_{r \to 0^+} \frac{-r^2}{\sqrt{4-r^2} - 2} \cdot \frac{\sqrt{4-r^2} + 2}{\sqrt{4-r^2} + 2}$$

$$= \lim_{r \to 0^+} \frac{-r^2\left(\sqrt{4-r^2} + 2\right)}{4 - r^2 - 4} = \lim_{r \to 0^+} \frac{-r^2\left(\sqrt{4-r^2} + 2\right)}{-r^2}$$

$$= \lim_{r \to 0^+} \left(\sqrt{4-r^2} + 2\right) = \sqrt{4-0^2} + 2$$

$$= 4$$

Es decir que al contraerse el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, el punto R se está aproximando al punto $(4,0)$

La siguiente figura muestra la superposición de 3 círculos contrayéndose para ilustrar gráficamente como la intersección de la recta con el eje x se aproxima al punto $(4,0)$