6.10 Triángulos oblicuángulos

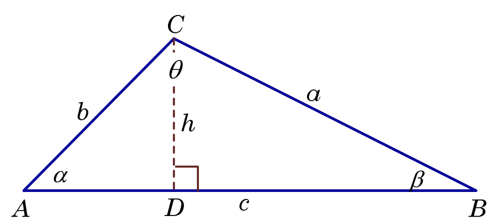
OBJETIVOS

- Utilizar la ley de senos para resolver triángulos oblicuángulos.
- Utilizar la ley de cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.
- Resolver problemas de triángulos utilizando la ley de senos y la ley de cosenos

Resolver un triángulo consiste en encontrar la medida de todos sus lados y de todos sus ángulos. En la sección 6.1 se estudiaron los procedimientos para resolver triángulos rectángulos, es decir aquellos triángulos que tienen un ángulo que mide 90º. Los triángulos que no tienen un ángulo recto, reciben el nombre de **triángulos oblicuángulos**. En esta sección se estudian la ley de senos y la ley de cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.

La ley de senos

Considere el triángulo oblicuángulo ABC que se muestra en la siguiente figura. Al trazar la altura perpendicular al lado AB, se forman los triángulos rectángulos ACD y BCD.



Usando la definición del seno de un ángulo se tiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}$$

Despejando h en cada una de las ecuaciones anteriores

$$h = b\operatorname{sen}\alpha \qquad h = a\operatorname{sen}\beta$$

Igualando las expresiones para h

$$b\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen}\beta$$

Finalmente, dividiendo ambos lados de la ecuación entre $\operatorname{sen}\theta\cos\beta$ se obtiene

$$\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

De manera similar, cuando la altura es trazada a los otros lados, se obtienen las expresiones siguientes

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \frac{c}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

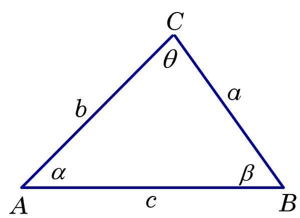
Ley de senos

Si a, b, y c son las medidas de los lados de un triángulo oblicuángulo, y α, β y θ son respectivamente las medidas de los ángulos opuestos a esos lados, entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}$$

Ejemplo 1: Usando la ley de senos para resolver un triángulo oblicuángulo

Si $\theta = 65^\circ$, $\alpha = 47^\circ$ y $c = 18\,\text{cm}$. Encuentre los lados y los ángulos desconocidos en el triángulo que se muestra en la figura siguiente



Solución

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º, la medida del ángulo β es

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - \alpha - \theta\\ &= 180^\circ - 47^\circ - 65^\circ\\ &= 68^\circ\end{aligned}$$

Utilizando la ley de senos para encontrar a

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$a = \frac{c\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{18\operatorname{sen}(47^\circ)}{\operatorname{sen}(65^\circ)} = 14.53\,\text{cm}$$

Usando la ley de senos para encontrar b

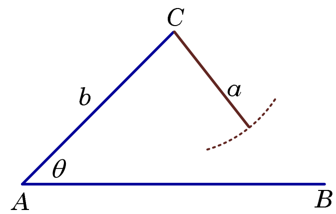
$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$b = \frac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{18\operatorname{sen}(68^\circ)}{\operatorname{sen}(65^\circ)} = 18.41\,\text{cm}$$

El caso ambiguo

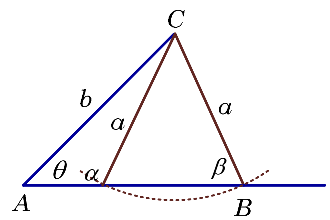
Cuando se resuelven triángulos oblicuángulos, cuando se conocen dos lados del triángulo y un ángulo opuesto a uno de esos lados, se le llama **caso ambiguo**. Al resolver el triángulo se pueden presentar 3 situaciones distintas. Para ilustrar esta situación, considere la siguiente figura, en donde se conocen los lados a y b la medida del ángulo θ.

a. El lado a tiene una longitud muy corta y no es posible formar un triángulo oblicuángulo



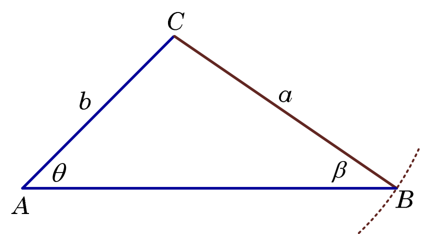
Cuando sucede esto y se utiliza la ley se senos para encontrar el ángulo opuesto al lado b, se obtendrá un valor para la función seno mayor que 1 o menor que -1, lo cual no es posible ya que los valores de la función seno se encuentran en el intervalo $[-1,1]$.

b. El lado a tiene una longitud tal que el problema tiene dos soluciones



En este caso se forman dos triángulos pues se obtienen dos valores angulares β y α, uno en el primer cuadrante y otro en el segundo cuadrante, ya que la función seno es positiva en ambos cuadrantes. En este caso la longitud a es menor que la longitud b.

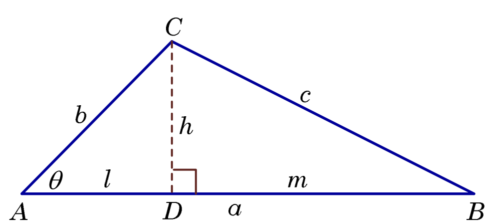
c. El lado a tiene una longitud mayor que la del lado b.



En este caso el problema tiene solución única ya que la solución para un ángulo en el segundo cuadrante es imposible.

La ley de cosenos

Considere el triángulo oblicuángulo ABC, cuyos lados son a, b, y c. En dicho triángulo se ha trazado la altura perpendicular al lado AB, el cual queda dividido en los segmentos AD y BD de longitudes l y m respectivamente, como se muestra en la siguiente figura



Como $a = l + m$, se tiene que $m = l - a$

Por otro lado, se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{b}\text{, entonces } h = b\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{l}{b}\text{, entonces } l = b\cos\theta$$

Por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$c^2 = h^2 + m^2$$

Al sustituir las expresiones obtenidas en la ecuación anterior y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned}
c^2 &= (b\operatorname{sen}\theta)^2 + (l-a)^2 \\
c^2 &= (b\operatorname{sen}\theta)^2 + (b\cos\theta - a)^2 \\
c^2 &= b^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\theta + a^2 \\
c^2 &= b^2\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) - 2ab\cos\theta + a^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta
\end{aligned}$$

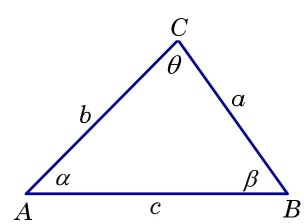
Ley de cosenos

Si a y b son las medidas de dos lados de un triángulo, y θ es la medida del ángulo comprendido entre dichos lados, entonces la medida del lado opuesto c al ángulo θ, está dada por

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Ejemplo 2: Usando la ley de cosenos para resolver un triángulo oblicuángulo

Si $\theta = 75^\circ$, $a = 30\,\text{cm}$ y $b = 40\,\text{cm}$. Encuentre los lados y los ángulos desconocidos en el triángulo que se muestra en la figura siguiente



Solución

Recuerde que resolver el triángulo consiste en encontrar la medida de los lados y ángulos desconocidos.

Utilizando la ley de cosenos se puede encontrar la longitud del lado $AB = c$

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \\
c^2 &= (30)^2 + (40)^2 - 2(30)(40)\cos 75^\circ \\
c^2 &= 3{,}121.166 \\
c &= \sqrt{3{,}121.166} \\
c &= 55.867\ \text{cm}
\end{aligned}$$

Por medio de la ley de senos se calculará la medida del ángulo β

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b\operatorname{sen}\theta}{c} = \frac{(40)\operatorname{sen}75^\circ}{55.867} = 0.6916$$

Utilizando la calculadora para obtener el valor del ángulo β en grados

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}(0.6916) = 43.76^\circ$$

Calculando la medida del ángulo α por medio de la suma de los ángulos internos de un triángulo

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \theta$$

$$\alpha = 180^\circ - 43.76^\circ - 75^\circ = 61.24^\circ$$

ϕ

Aplicaciones

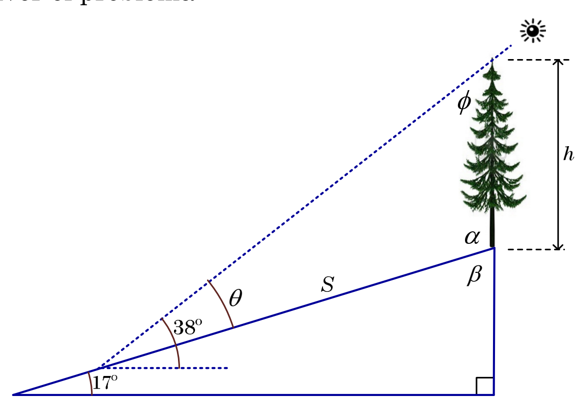
En los siguientes ejemplos se ilustra cómo se pueden utilizar las leyes de senos y cosenos para resolver problemas aplicados en donde el modelo es un triángulo oblicuángulo.

Ejemplo 3: Usando la ley de senos para encontrar la altura de un árbol

Un árbol vertical está situado en la parte alta de un camino que forma un ángulo de 17º con la horizontal. Una persona que camina hacia arriba por el camino observa el que el Sol por detrás del árbol, tiene un ángulo de elevación de 38º. Calcule la altura del árbol si la longitud de la sombra es de 36 pies de longitud.

Solución

En la siguiente figura se ilustra la situación del problema y se calculan los ángulos necesarios para resolver el problema



$$\beta = 90 - 17^\circ = 73^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$$

$$\theta = 38^\circ - 17^\circ = 21^\circ$$

$$\phi = 180^\circ - \theta - \alpha = 180^\circ - 21^\circ - 107^\circ = 52^\circ$$

Ahora se puede utilizar la ley de senos para calcular la altura del árbol

$$\frac{S}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$h = \frac{S\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi}$$

$$h = \frac{(36)(\operatorname{sen}21)}{\operatorname{sen}52} = 16.37$$

Entonces la altura del árbol es aproximadamente de 16.37 pies

Ejemplo 4:

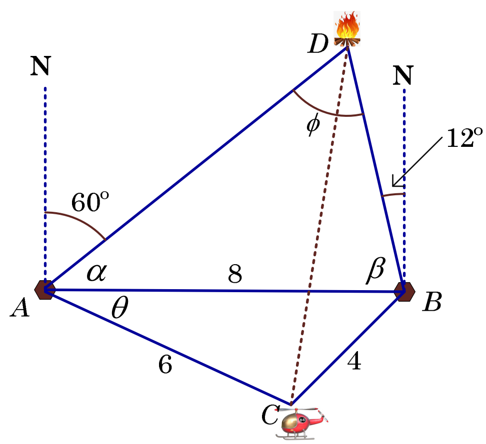
En un bosque de reserva ecológica, un puesto de vigilancia B está localizado 8 km al este del puesto de vigilancia A. Desde el puesto A, un guardia observa un incendio en dirección N 60º E. Mientras que desde el punto B otro guardia ubica en mismo incendio en dirección N 12º W. Para apagar el incendio utilizan un helicóptero localizado en su base C, al sur de los puestos A y B, a 6 kilómetros de A y a 4 kilómetros de B.

a. Determine la distancia del helicóptero al incendio.

b. Calcule el rumbo que debe tomar el piloto para dirigirse al incendio.

Solución

Para resolver el problema hay que construir un dibujo que ilustre en un plano la posición de todos los elementos involucrados



a. Los ángulos del triángulo ABD se calculan de la siguiente forma

$$\beta = 90 - 12^\circ = 78^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\phi = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 78^\circ = 72^\circ$$

Ahora se puede utilizar la ley de senos en el triángulo ABD para calcular la distancia del punto A al incendio en D.

$$\frac{AD}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{8}{\operatorname{sen}\phi}$$

$$AD = \frac{8\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\phi}$$

$$AD = \frac{(8)(\operatorname{sen}78)}{\operatorname{sen}72} = 8.23\ \text{km}$$

Ahora se calculará el ángulo θ en el triángulo ABC utilizando la ley de cosenos

$$4^2 = 6^2 + 8^2 - 2(6)(8)\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{16 - 36 - 64}{-96}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{84}{96}\right) \approx 28.95^\circ$$

Utilizando nuevamente la ley de cosenos en el triángulo ACD para encontrar la distancia que debe recorrer el helicóptero.

$$(CD)^2 = (6)^2 + (8.23)^2 - 2(6)(8.23)\cos(28.95 + 30)$$

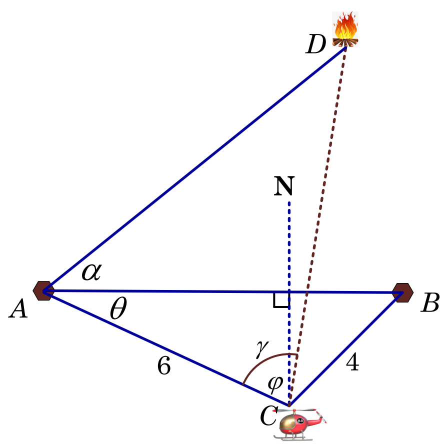
$$(CD)^2 = 36 + 67.7329 - 50.939$$

$$CD = \sqrt{52.7939}$$

$$CD = 7.263 \text{ km}$$

El helicóptero debe recorrer una distancia de 12.437 km para llegar al punto del incendio.

b. Para obtener el rumbo que debe tomar el helicóptero, se utilizará la siguiente figura



El rumbo que debe seguir la nave será el ángulo γ menos el ángulo φ. Haciendo los cálculos se tiene

$$\frac{AD}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{CD}{\operatorname{sen}(\theta + \alpha)}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{(AD)\operatorname{sen}(\theta + \alpha)}{CD} = \frac{(8.23)\operatorname{sen}(58.95)}{7.263}$$

$$= 0.9708$$

Al utilizar una calculadora para obtener el ángulo se obtiene que

$$\gamma = \operatorname{sen}^{-1}(0.9708) = 76.12^\circ$$

El rumbo que debe tomar la nave es

$$\gamma - \varphi = \lambda - (90 - \theta)$$

$$= 76.12 - (90 - 28.95)$$

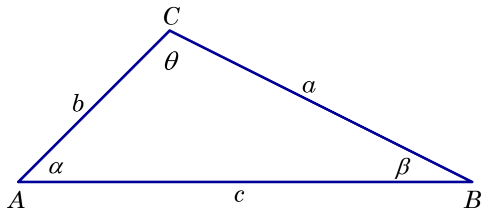
$$= 15.07^\circ$$

Es decir que el helicóptero debe viajar en dirección

N 15.07º E

Ejercicios de la sección 6.9

En los ejercicios 1 a 5 utilice la ley de senos para encontrar los elementos restantes del triángulo



1. $\alpha = 82°$, $\beta = 21°$, $b = 8$

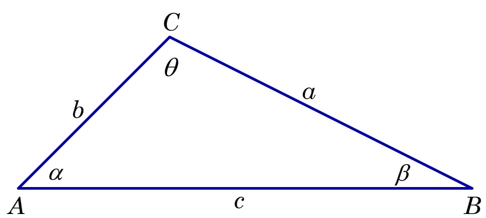
2. $\alpha = 53°$, $\beta = 32°$, $c = 20$

3. $\alpha = 43°$, $\theta = 100°$, $c = 20$

4. $\alpha = 45°$, $a = 8$, $b = 20$

5. $\beta = 28°$, $a = 12$, $b = 6$

En los ejercicios 6 a 10 utilice la ley de cosenos y la ley de senos para encontrar los elementos restantes del triángulo



6. $\alpha = 82°$, $c = 15$, $b = 8$

7. $a = 12$, $\beta = 32°$, $c = 20$

8. $b = 5°$, $\theta = 100°$, $a = 12$

9. $a = 15$, $b = 7$, $c = 20$

10. $a = 4$, $b = 7$, $c = 12$

En los problemas 11 a 30 resuelva el problema de triángulos utilizando el procedimiento que considere apropiado

11. Desde el fondo de un barranco se necesitan 62 pies de cuerda para alcanzar la cima de la pared de uno de los lados y 86 pies para alcanzar la cima de la pared opuesta. Si ambas cuerdas forman un ángulo de 123 grados, ¿Cuál es la distancia entre la cima de una de las paredes del cañón a la otra?

12. Un barco de la guardia costera se localiza a 5 millas al sur de un buque en el momento en que reciben una llamada de auxilio de una pequeña lancha. Para socorrerla el barco navega con rumbo S 50° E a una velocidad de 5 millas por hora y el buque navega con rumbo S 10° E a una velocidad de 10 millas por hora.

Calcule la distancia del barco y del buque a la lancha.

¿Cuál de los dos llega primero al rescate?

13. Un teleférico transporta pasajeros horizontalmente desde el punto A, que está a 1.2 millas del punto B que se halla en la base de una montaña, seguidamente hasta un punto P de la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 21º y 65º respectivamente,

a. Calcular la distancia entre A y P,

b. Calcular la altura de la montaña.

14. Un globo se encuentra a una altitud de 1350 pies sobre lo alto de una montaña que mide 4895 pies. Desde el globo, el ángulo de depresión a la cúspide de un volcán es de 37º, y desde lo alto de la montaña, el ángulo de elevación a la cúspide del volcán es de 17º. Determine la altura del volcán.

15. Para medir la altura de una montaña un topógrafo toma dos observaciones de la cima desde dos puntos separados entre sí una distancia de 900 metros en línea recta hacia la montaña. La primera observación tiene como resultado un ángulo de elevación de 47°, la segunda observación tiene un ángulo de elevación de 35°. Determine la altura de la montaña.

16. Dos observadores situados en putntos A y B caminan uno hacia el otro, en un camino recto hacia la base T de una torre vertical que se encuentra sobre el mismo camino. Si la altura de la torre es de 40 metros. Encuentre la distancia entre A y B si los ángulos de elevación de los observadores son de 40º y 52 grados respectivamente.

17. Al observar el extremo superior de un poste desde el techo de una casa 30 pies de altura, el ángulo de elevación es de 14°. Si se observa ese mismo extremo del poste desde la parte inferior del de la casa, el ángulo de elevación es de 28°. Determine:

a. La altura del poste

b. La distancia de la casa al poste.

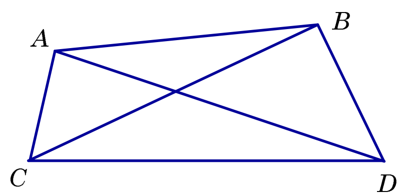
18. Un guardia forestal va hacia arriba por un camino recto que forma un ángulo de 5º con la horizontal. El guardia se dirige hacia una torre de observación que tiene 100 pies de altura. ¿Cual es la distancia entre el guardia y la base de la torre cuando el ángulo de elevación desde el guardia a la parte más alta de la torre es de 40º.

19. Un barco parte de un puerto tomando la dirección $\text{N } 30^\circ \text{ E}$ con una rapidez constante de 30 millas por hora. Una hora después, un segundo barco parte del mismo puerto en dirección $\text{N } 73^\circ \text{ W}$ con una rapidez constante de 40 millas por hora.

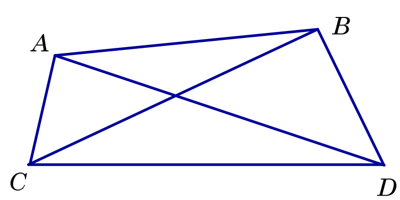
a. Encuentre la distancia entre los barcos después de transcurridas dos horas.

b. Si el segundo barco se detiene a las dos horas. Obtenga el rumbo que debe tomar el primer barco para ir al rescate del segundo.

20. Para determinar la distancia entre dos puntos Inaccesibles A y B, un topógrafo mide las distancias $BC = 184$ pies, $BD = 102$ pies, $CD = 218$ pies, $AD = 236$ pies y $AC = 80$ pies, como se muestra en la figura. Calcule la distancia AB.



21. Para determinar la distancia entre dos puntos Inaccesibles A y B, un topógrafo mide la distancia $CD = 218$ pies y los ángulos $\angle BCD = 33^\circ$, $\angle BDC = 74^\circ$, $\angle ADC = 21^\circ$ y $\angle ACD = 80^\circ$, como se muestra en la figura. Calcule la distancia AB.

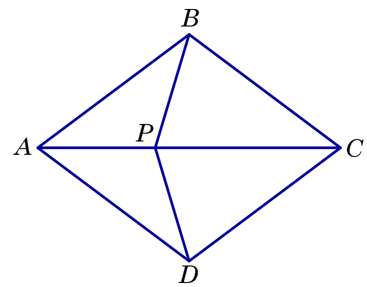


22. Un barco navega con dirección N 85° E desde un puerto, después de recorrer una distancia de 10 kilómetros, cambia su dirección a N 25° O y viaja 20 kilómetros en la nueva dirección.

a. ¿Cuál es la distancia desde el puerto hasta la posición final del barco?

b. ¿Cuál es el rumbo de la posición final del barco, medida desde el puerto.

23. Las tejas de estrella se forman a partir de un rombo $ABCD$ con lados de longitud 10 pulgadas y un ángulo interior BPC de 72°. Primero se ubica el punto P de la diagonal AC que está a una distancia 10 pulgadas del vértice C y luego se dibujan los segmentos PB y PD, como se muestra en la figura. Las dos tejas formadas reciben el nombre de dardo y cometa.



a. Hallar la medida en grados de los ángulos CBP, APB y ABP.

b. Calcule la longitud del segmento BP.

c. Calcule el área del cometa y el área del dardo.

24. Desde un punto A en el suelo, el ángulo de elevación a la parte superior de un edificio alto es de 24º. Desde un punto B, 600 pies más cerca del edificio, el ángulo de elevación medido es de 32º. Determine la altura del edificio.

25. Un faro que gira una vuelta cada 48 segundos, está localizado en frente de una playa recta. A los cuatro segundos de haber iluminado el punto más cercano sobre la costa, ilumina un punto P sobre la costa y otros cuatro segundos después, ilumina otro punto Q, también sobre la costa, que está a 220 metros de P. Determine la distancia del faro a la costa.

26. Un topógrafo observa que la dirección desde el punto A hasta el punto B es $\text{N } 63^\circ \text{ E}$ y que la dirección del punto A al punto C es $\text{N } 38^\circ \text{ E}$. Si la distancia de A a B es 239 metros y la distancia de B a C es de 374 metros, calcule la distancia de A a C.

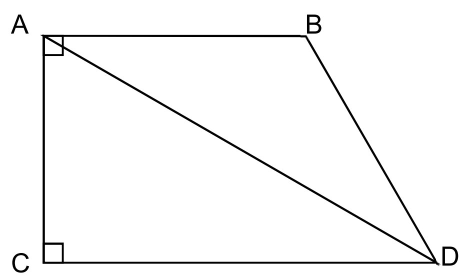
27. Desde un helicóptero que se encuentra a una altura de 500 metros sobre el nivel del mar, se observan dos barcos. El primero de ellos en dirección $S\,38^\circ \text{ E}$, con un ángulo de depresión de 28º y el segundo en dirección $\text{N } 47^\circ \text{ W}$ con un ángulo de depresión de 35º. Encuentre la distancia entre los dos barcos.

28. Un barco sale de Puerto Barrios hacia Cuba en dirección N10ºE navegando a 30 millas por hora, 5 horas después, el piloto se da cuenta que cometió un error al fijar el curso y que realmente ha estado navegando en dirección N30ºE. Si un viaje normal a Cuba dura 15 horas:

a. ¿Cuál es el cambio de dirección debe realizar el piloto para llegar a su destino?

b. ¿Cuál será la duración total de éste viaje?

29. Se tiene el trapecio recto que se muestra en la figura, de tal forma que la diagonal $\overline{AD}$ lo divide en los dos triángulos siguientes: el triángulo isósceles ΔABD y el triángulo rectángulo ΔACD. Si se sabe que la altura del trapecio es $\overline{AC} = 300$ centímetros y la base mayor $\overline{CD} = 300\sqrt{3}$, calcule:



a. La longitud de la diagonal $\overline{AD}$.

b. El valor del ángulo $\measuredangle CAD$.

c. El valor de los ángulos internos del trapecio.

d. La longitud del segmento $\overline{AB}$.

e. Utilizando ley de cosenos, compruebe el valor del ángulo $\measuredangle ABD$.

30. El aeropuerto *B* está a 450 kilómetros del aeropuerto *A* en dirección N 55º E. Un Piloto que desea volar del aeropuerto *A* al *B,* vuela erróneamente hacia el este a una velocidad de 300 kilómetros por hora durante 30 minutos, cuando nota su error.

a. ¿Qué tan lejos está el piloto del aeropuerto *B* en el momento de notar su error?

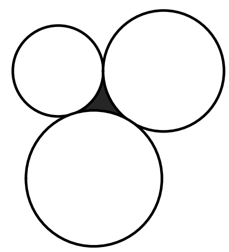
b. ¿En qué rumbo debe dirigir el avión con el objeto de llegar a su destino?

31. Un globo se encuentra a una altitud de 1350 pies sobre lo alto de una montaña que mide 4895 pies. A la par de esta montaña se ve un volcán. Desde el globo, el ángulo de depresión a la cúspide del volcán es de 37º, y desde lo alto de la montaña, el ángulo de elevación a la cúspide del volcán es de 17º. Determine la altura del volcán.

32. La base de una antena de comunicaciones, tiene un ángulo de elevación de 24° respecto a un observador situado a 200 metros cuesta debajo de la base. El observador también ve que una sección de la antena necesita reparación. Si los ángulos de elevación de la sección a reparar son de 48° y 63°. Calcule la longitud de la sección a reparar.

33. Un barco que navega a 15 millas por hora parte de un muelle con dirección N27°E. En cierto instante el capitán del barco observa que se encuentra alineado con dos faros distantes que se localizan en dirección N35°E. Dos horas más tarde el capitán del barco avista nuevamente los faros observando que el más distante se localiza en dirección N67°E y que el más cercano al barco se localiza en dirección N78°E. Determinar la distancia entre los dos faros.

34. Tres círculos tangentes entre sí tienen radios de 6 cm, 8 cm y 9 cm. Encuentre el área sombreada.



35. La figura muestra un trapacio isosceles inscrito en un círculo de radio 12 cm. Si los lados no paralelos del trapacio miden 15 cm. Calule el área dentro del círculo y fuera del trapecio.