6.7 Ecuaciones trigonométricas

OBJETIVOS

- Encontrar las soluciones de ecuaciones trigonométricas en un intervalo dado
- Encontrar la solución general de una ecuación trigonométrica.

Una **ecuación trigonométrica** es aquella en la cual la incógnita está expresada en términos de funciones trigonométricas. Aunque una identidad trigonométrica puede ser considerada como una ecuación trigonométrica, en ésta sección se estudian las ecuaciones trigonométricas que no son verdaderas para cualquier ángulo.

El procedimiento para resolver una ecuación trigonométrica se divide en dos partes, como se indica en la tabla siguiente

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Utilice operaciones algebraicas y sustituciones trigonométricas para despejar las funciones trigonométricas que contienen la incógnita, como $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$.
2. Utilice una calculadora y el círculo trigonométrico para encontrar todos los valores angulares, para los valores de las funciones trigonométricas obtenidas en el inciso anterior.
3. Exprese la respuesta en grados o en radianes, según se indique en el problema. Si las soluciones se piden en un intervalo, únicamente hay que obtener los valores angulares en ese intervalo. Si no se indica ningún intervalo hay que encontrar la solución general y expresarla en radianes.

Ejemplo 1: Solución de una ecuación trigonométrica sencilla

Dada la ecuación trigonométrica

$$\cos\theta + \frac{1}{2} = 0$$

a. Encuentre todas las soluciones para $0 \le \theta \le 360°$

b. Encuentre la solución general de la ecuación expresada en radianes.

Solución

a. En ésta ecuación, despejar la función trigonométrica es muy sencillo, pues únicamente hay que pasar a restar un número al otro lado de la ecuación

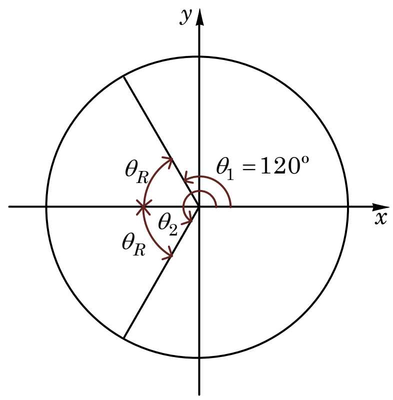
$$\cos\theta + \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

Del signo de las funciones trigonométricas se sabe que el coseno es negativo en el segundo y en el tercer cuadrante. Al utilizar una calculadora científica en el modo de grados, para obtener un ángulo tal que su coseno sea igual a $-\frac{1}{2}$.

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Para obtener el otro ángulo se utiliza un círculo trigonométrico y el ángulo de referencia, como se muestra en la figura siguiente



El ángulo de referencia indicado en la figura es

$$\theta_R = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Para cualquier solución, el ángulo de referencia siempre es el mismo, entonces.

$$\theta_2 = 180^\circ + \theta_R = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

Por lo tanto, las soluciones para el intervalo $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ son

$$\theta = 120^\circ, \quad \theta = 240^\circ$$

b. Para encontrar la solución general en radianes, hay que convertir a radianes las soluciones anteriores y sumar a cada una de ellas el período de la función coseno

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}, \quad 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$$

Por lo que la solución general de la ecuación expresada en radianes es

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{y} \quad \theta = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad \text{donde } k \text{ es cualquier entero.}$$

Observe que al sumar a la solución principal el período multiplicado por cualquier entero k, se obtiene una cantidad infinita de ángulos que son coterminales con el ángulo principal.

Ejemplo 2: Solución de una ecuación trigonométrica con función tangente

Dada la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$$

a. Encuentre todas las soluciones para $0 \leq \theta \leq 360^\circ$

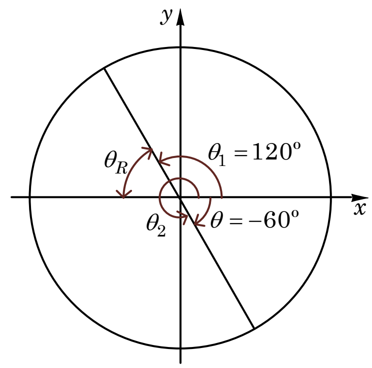
b. Encuentre la solución general de la ecuación expresada en radianes.

Solución

a. La solución de esta ecuación se encuentra de forma similar a la del ejemplo anterior. Sabemos que la tangente de un ángulo es negativa cuando el ángulo se encuentra en el segundo o cuarto cuadrante. Una de las dos soluciones puede ser encontrada por medio de la calculadora

$$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -60°$$

Observe que la solución que da la calculadora se localiza en el cuarto cuadrante, pero no se encuentra en el intervalo $0° \leq \theta \leq 360°$. Para encontrar las soluciones es necesario hacer del círculo trigonométrico



El ángulo de referencia tiene el mismo valor que el ángulo dado por la calculadora pero con signo positivo

$$\theta_R = 60°$$

La primera solución se encuentra en el segundo cuadrante y es

$$\theta_1 = 180° - \theta_R = 180° - 60° = 120°$$

En el caso de la función tangente, la segunda solución se puede encontrar sumando 180º a la primera, ya que se encuentran en cuadrantes opuestos, entonces

$$\theta_2 = 120° + 180° = 300°$$

Por lo tanto las soluciones en el intervalo $0° \leq \theta \leq 360°$ son

$$\theta = 120° \quad \text{y} \quad \theta = 300°$$

b. La solución general, para el caso de la función tangente se encuentra sumando un múltiplo del período π a cualquiera de las soluciones principales, ya que con una solución se genera la otra, expresando la primera de ellas expresada en radianes, se tiene

$$120° = \frac{2\pi}{3}$$

La solución general en radianes es

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \text{ es un entero.}$$

Ejemplo 3: Solución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$2\operatorname{sen}x\cos x = \cos x\,,\ 0 \le x \le 2\pi$$

Solución

Para resolver esta ecuación primero hay que despejar las funciones trigonométricas. Trasladando la función en el lado derecho al lado izquierdo y luego factorizando

$$2\operatorname{sen}x\cos x = \cos x$$

$$2\operatorname{sen}x\cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2\operatorname{sen}x - 1) = 0$$

Al igualar a cero cada uno de los factores se obtiene

$$\cos x = 0 \qquad\qquad 2\operatorname{sen}x - 1 = 0$$

$$2\operatorname{sen}x = 1$$

$$\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \text{ cuando } x = \frac{\pi}{2} \text{ y cuando } x = \frac{3\pi}{2}$$

El $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$ en el primero y en el segundo cuadrante. Al obtener uno de los ángulos con una calculadora se tiene

$$x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Como el ángulo de referencia es $\theta_R = \frac{\pi}{6}$, la solución en el segundo cuadrante es

$$x = \pi - \theta_R = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$ son

$$x = \frac{\pi}{2},\quad x = \frac{3\pi}{2},\quad x = \frac{\pi}{6},\quad x = \frac{5\pi}{6}$$

Ejemplo 4: Solución de una ecuación trigonométrica más complicada

Resuelva la ecuación trigonométrica

$$\cos x - 2\operatorname{sen}x = 2\,,\ 0 \le x \le 2\pi$$

Solución

Para resolver esta ecuación, primero hay que realizar las operaciones algebraicas y las sustituciones trigonométricas y necesarias para despejar las funciones trigonométricas. Trasladando el término $2\operatorname{sen}x$ al lado derecho de la ecuación y elevando ambos lados al cuadrado se tiene

$$\cos x - 2\operatorname{sen} x = 2$$

$$\cos x = 2\operatorname{sen} x + 2$$

$$(\cos x)^2 = (2\operatorname{sen} x + 2)^2$$

$$\cos^2 x = 4\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen} x + 4$$

Utilizando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ se tiene que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

Al sustituir en la ecuación y trasladar todos los términos al lado izquierdo se obtiene una ecuación cuadrática

$$1 - \operatorname{sen}^2 x = 4\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen} x + 4$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x - 4 = 0$$

$$-5\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x - 3 = 0$$

$$5\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen} x + 3 = 0$$

La ecuación anterior se puede factorizar en la forma siguiente

$$\frac{(5\operatorname{sen} x + 5)(5\operatorname{sen} x + 3)}{5} = 0$$

$$(\operatorname{sen} x + 1)(5\operatorname{sen} x + 3) = 0$$

De donde obtenemos las ecuaciones sencillas $\operatorname{sen} x = -1$ y $\operatorname{sen} x = -\dfrac{3}{5}$

Para $\operatorname{sen} x = -1$,

$$x = \operatorname{sen}^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{2}$$

Para $\operatorname{sen} x = -\dfrac{3}{5}$,

Con una calculadora se obtiene

$$x = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) = -0.6435 \text{ rad}.$$

Que es una solución en el cuarto cuadrante. El ángulo de referencia es

$$\theta_R = 0.6435 \text{ rad}$$

Los ángulos positivos en el tercero y cuarto cuadrante

$$x = \pi + \theta_R = \pi + 0.6435 = 3.785 \text{ rad}$$

$$x = 2\pi - \theta_R = 2\pi - 0.6435 = 5.6397 \text{ rad}$$

Como se elevaron al cuadrado ambos lados de la ecuación, existe la posibilidad que algunas soluciones no satisfagan la ecuación original, por lo que se debe hacer la prueba a cada una de las soluciones encontradas.

Para $= \dfrac{3\pi}{2}$ se tiene

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$$

$$0 - 2(-1) = 2$$

$$2 = 2$$

Resultando que $x = \dfrac{3\pi}{2}$ si satisface la ecuación original

Se deja al estudiante hacer la prueba para las otras posibles soluciones

Al concluir las pruebas se tiene que las soluciones de la ecuación son

$$x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{y} \quad x = 5.6397 \text{ rad}$$

Ejercicios de la sección 6.7

En los ejercicios 1 a 5 encuentre las soluciones de la ecuación en el intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos\theta - 1 = 0$

3. $\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

4. $\sec\theta - \sqrt{2} = 0$

5. $\cot\theta = -1$

En los ejercicios 6 a 10 encuentre las soluciones de la ecuación en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$

6. $\cos t = -\frac{1}{2}$

7. $\tan t = 0$

8. $3\text{sent} + 5 = 0$

9. $\cos t - 4 = 0$

10. $3\sec t - 8 = 0$

En los ejercicios 11 a 30 encuentre la solución de la ecuación en el intervalo indicado.

11. $\cos^2 x - 1 = 0, \quad 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

12. $2\operatorname{sen}x\cos x - \sqrt{2}\operatorname{sen}x = 0, \quad [0, 2\pi]$

13. $3 - 5\operatorname{sen}\theta = 4\operatorname{sen}\theta + 1, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

14. $3\tan^2 x - 2\tan x = 0, \quad [0, 2\pi]$

15. $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

16. $2\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen}x + 3 = 0, \quad [0, 2\pi]$

17. $2\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos t, \quad [0, 2\pi]$

18. $\cos^2 x + 4 = 2\operatorname{sen}x - 3, \quad [0^\circ, 360^\circ]$

19. $\tan x\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x = 0, \quad [0, 2\pi]$

20. $\csc^2 x - 3 = 3\cot^2 x, \quad [0, 2\pi]$

21. $4\cot^2\theta + 3\cot\theta = 0, \quad [0^\circ, 360^\circ]$

22. $5\operatorname{sen}x - \csc x = 0, \quad [0^\circ, 360^\circ]$

23. $2\operatorname{sen}x\cos x - \operatorname{sen}x - 2\cos x + 1 = 0, \quad [0, 2\pi]$

24. $6\cos x\operatorname{sen}x - 3\cos x = 4\operatorname{sen}x - 2, \quad [0^\circ, 360^\circ]$

25. $\operatorname{sen}x + \cos x = 0, \quad [0, 2\pi]$

26. $2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 1, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

27. $\operatorname{sen}x + 2\cos x = 1, \quad [0, 2\pi]$

28. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen}x - 1 = 0, \quad [0, 2\pi]$

29. $2\cos x + 3\sec x = 1, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

30. $3\operatorname{sen}x + \csc x = 5, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

En los ejercicios 31 al 40 encuentre la solución general de la ecuación dada.

31. $\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen}x = 1$

32. $2\cos^2 x + 3\operatorname{sen}x - 3 = 0$

33. $\cos x + \operatorname{sen}x = 1$

34. $2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}x - 1 = 0$

35. $2\sec x\operatorname{sen}x + 2 = 4\operatorname{sen}x + \sec x$

36. $\operatorname{sen}^2 x\cot^2 x + \cos^2 x\tan^2 x = 1$

37. $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \tan\theta = 0$

38. $\cos^2 x - 3\operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

39. $\operatorname{sen}^2 x - 2\cos x + 3\cos^2 x = 0$

40. $2\operatorname{sen}x\cos x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen}x = \sqrt{3}\cos x - \sqrt{6}$