

6.3 Funciones trigonométricas de números reales

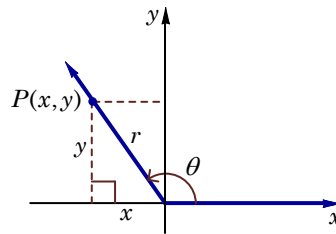
OBJETIVOS

- Encontrar las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.
- Evaluar expresiones que contienen funciones trigonométricas de cualquier ángulo.
- Encontrar los lados y ángulos en Plantear y resolver
-

La trigonometría no tendría muchas aplicaciones si las medidas angulares se limitaran a los ángulos agudos. Afortunadamente éste no es el caso, en esta sección se extiende la definición de las funciones trigonométricas a cualquier ángulo y posteriormente a las funciones trigonométricas de cualquier número real.

Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Considere un ángulo agudo θ en posición estándar y un punto $P(x,y)$ en el lado terminal del ángulo, como se muestra en la figura siguiente



Se definen las funciones trigonométricas del ángulo θ de la siguiente forma

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

Si θ es un ángulo en posición estándar, $P(x,y)$ es un punto en el lado terminal del ángulo y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto P , entonces las seis funciones trigonométricas del ángulo θ se definen como

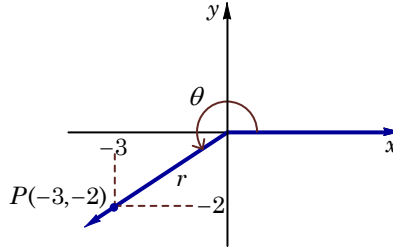
$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} & \cos \theta = \frac{x}{r} & \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \\ \operatorname{csc} \theta = \frac{r}{y}, \quad y \neq 0 & \sec \theta = \frac{r}{x}, \quad x \neq 0 & \cot \theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \end{array}$$

Ejemplo 1: Funciones trigonométricas de un dado un punto

Obtenga las seis funciones trigonométricas del ángulo θ , que tiene lado terminal en la recta que contiene al punto $P(-3,-2)$

Solución

La figura muestra el ángulo θ en posición estándar y el punto $P(-3, -2)$. Observe que el ángulo se localiza en el tercer cuadrante. Como hay infinitos ángulos con el mismo lado inicial y terminal, se acostumbra tomar el ángulo positivo con el valor menor.



Calculando el valor de r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Ahora se puede calcular los valores de las 6 funciones trigonométricas pues se conocen los valores de x , y y r .

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = \frac{-2\sqrt{13}}{13}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{-3\sqrt{13}}{13}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{13}}{-3} = -\frac{\sqrt{13}}{3}$$

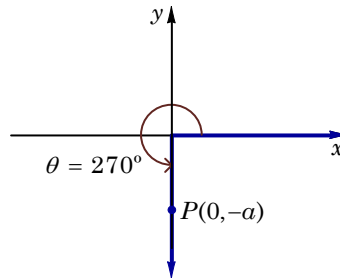
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{13}}{-2} = -\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Los ángulos cuadrantales son aquellos que su lado terminal coincide con uno de los ejes de coordenadas, por ejemplo 90° , 180° . Las funciones trigonométricas de un ángulo cuadrantal se pueden obtener fácilmente localizando un punto sobre el lado terminal y aplicando la definición de las funciones trigonométricas.

Por ejemplo, para determinar las funciones trigonométricas de 270° , localizamos un punto arbitrario en el eje y negativo $P(0, -a)$, $a > 0$, como se muestra en la figura siguiente



Calculando el valor de r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (-a)^2} = a$$

Ahora se puede calcular los valores de las 6 funciones trigonométricas pues se conocen los valores de x , y y r .

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} = \frac{-a}{a} = -1$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{-a} = 0$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{a} = 0$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{a}{0}, \text{ indefinido}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-a}{0}, \text{ indefinido}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{a}{-a} = -1$$

De forma similar se pueden obtener los valores de las funciones trigonométricas para los otros ángulos cuadrantales. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
0°	0	1	0	indefinida	1	indefinida
90°	1	0	indefinida	1	indefinida	0
180°	0	-1	0	indefinida	-1	indefinida
270°	-1	0	indefinida	-1	indefinida	0

Signos de las funciones trigonométricas

El signo de las funciones trigonométricas depende del cuadrante en donde se encuentre el lado terminal del ángulo. Por ejemplo si θ es un ángulo que tiene lado terminal en el segundo cuadrante y $P(x,y)$ es un punto en el lado terminal de θ , entonces x tiene signo negativo mientras que y tiene signo positivo; como r siempre es positivo, se pueden obtener fácilmente los signos de las funciones trigonométricas. $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{+}{+}$ es positivo, $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-}{+}$ es negativo, $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{+}{-}$ es negativa; los signos de las otras tres funciones trigonométricas se obtienen de manera similar.

La tabla siguiente muestra los signos de las funciones trigonométricas para un ángulo θ que tiene su lado terminal en el cuadrante indicado.

Signo de	I	II	III	IV
$\sin \theta$	positivo	positivo	negativo	negativo
$\cos \theta$	positivo	negativo	negativo	positivo
$\tan \theta$	positivo	negativo	positivo	negativo
$\cot \theta$	positivo	negativo	positivo	negativo
$\sec \theta$	positivo	negativo	negativo	positivo
$\csc \theta$	positivo	positivo	negativo	negativo

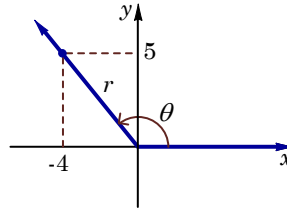
Ejemplo 2: Calculando funciones trigonométricas

Si $\cot \theta = -\frac{4}{5}$ y $\cos \theta < 0$, obtenga los valores de las otras funciones trigonométricas del ángulo θ .

Solución

Como la cotangente es negativa en el segundo y en el cuarto cuadrante, el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante; entonces el ángulo se localiza en el segundo cuadrante

Dibujando el ángulo se tiene que $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-4}{5}$



Calculando r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

Ahora se pueden calcular las seis funciones trigonométricas del ángulo

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-4}{\sqrt{41}} = \frac{-3\sqrt{41}}{41}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{41}}{-4} = -\frac{\sqrt{41}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

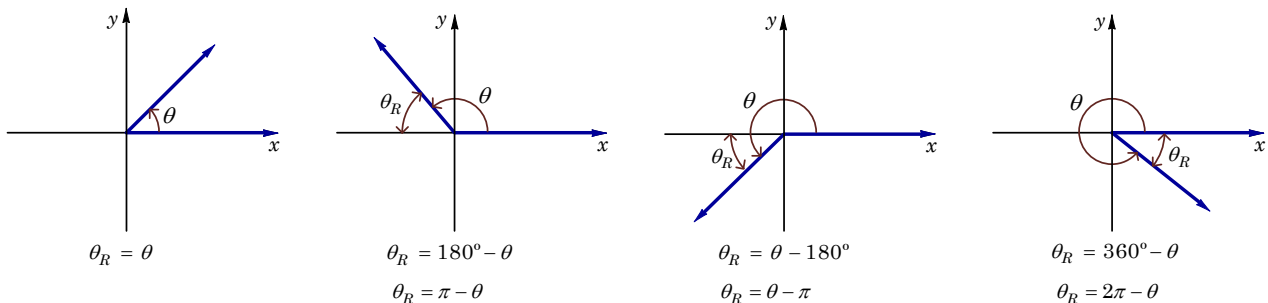
Ángulo de referencia

Para calcular las funciones trigonométricas de ángulos grandes o de ángulos negativos, con frecuencia se utiliza el **ángulo de referencia**, que no es más que un ángulo agudo asociado a cualquier ángulo. La definición formal es la siguiente

ÁNGULO DE REFERENCIA

Si θ es un ángulo en posición estándar, entonces su ángulo de referencia θ_R , es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x .

La siguiente figura muestra cuatro ángulos θ , uno en cada cuadrante y su correspondiente ángulo de referencia θ_R . El procedimiento para determinar la medida del ángulo de referencia varía para cada ángulo y depende del cuadrante en el cual se encuentre el lado terminal del ángulo así como del signo del ángulo.



Si un ángulo θ tiene una medida mayor de 360° o bien si el ángulo es negativo, para obtener su ángulo de referencia se puede utilizar el siguiente procedimiento

1. Obtenga primero un ángulo β que sea coterminal con el ángulo θ , tal que $0^\circ < \beta < 360^\circ$.
2. Obtenga el ángulo de referencia θ_R para el ángulo β utilizando los casos mostrados en la figura anterior.

Ejemplo 3: Calculando el ángulo de referencia

En cada caso obtenga el ángulo de referencia

a. $\theta = 235^\circ$

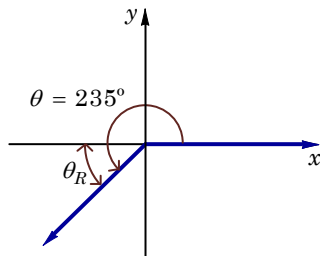
b. $\theta = 1000^\circ$

c. $\theta = -\frac{11\pi}{6}$

d. $\theta = -11$

Solución

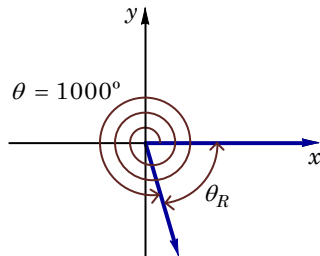
a.



En éste caso el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, y el ángulo de referencia es

$$\theta_R = 235^\circ - 180^\circ = 55^\circ$$

b.



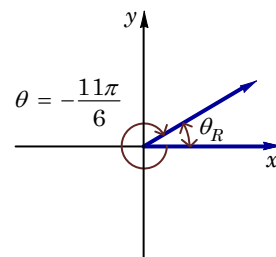
Un ángulo coterminal con el ángulo 1000° es

$$\beta = 1000 - 2(360^\circ) = 280^\circ$$

Como β se encuentra en el cuarto cuadrante. El ángulo de referencia de θ es el mismo que el de $\beta = 280^\circ$. Entonces

$$\theta_R = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$$

c.



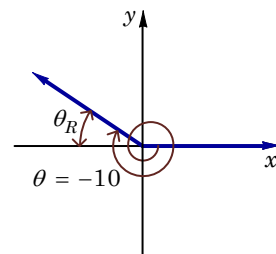
Un ángulo coterminal con θ es

$$\beta = -\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

y se encuentra en el primer cuadrante, entonces el ángulo de referencia es

$$\theta_R = \frac{\pi}{6}$$

d.



Un ángulo coterminal con el ángulo -10 es

$$\beta = -10 + 2(2\pi) = -10 + 4\pi \approx 2.57 \approx 0.82\pi$$

El cual se encuentra en el segundo cuadrante, como se muestra en la figura. El ángulo de referencia es

$$\theta_R = \pi - \beta = \pi - (-10 + 4\pi) = 10 - 3\pi \approx 0.183\pi$$

El ángulo de referencia es de utilidad en trigonometría. Puede ser útil para calcular las funciones trigonométricas de cualquier ángulo utilizando los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo, como se expresa en la siguiente propiedad.

PROPIEDAD DEL ÁNGULO DE REFERENCIA

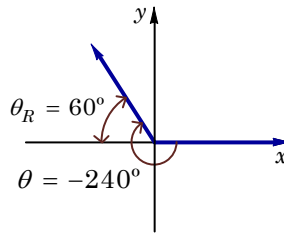
Para calcular las funciones trigonométricas de cualquier ángulo θ , calcule las funciones trigonométricas de su correspondiente ángulo de referencia θ_R y antepóngale el signo que corresponde a la función trigonométrica, de acuerdo al cuadrante en donde se encuentra el lado terminal del ángulo.

Ejemplo 3: Calculando funciones trigonométricas de un ángulo

Utilice el ángulo de referencia para calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\theta = -240^\circ$.

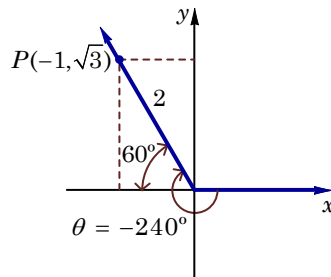
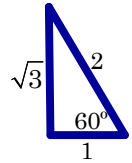
Solución

La figura muestra el ángulo θ y su correspondiente ángulo de referencia θ_R .



Como $\theta_R = 60^\circ$, es un ángulo especial, sus funciones trigonométricas son conocidas y se puede construir un triángulo rectángulo haciendo corresponder el ángulo agudo con el ángulo de referencia.

Ahora se utilizan los lados del triángulo y se trasladan al sistema de coordenadas, anteponiéndole el signo correspondiente al cuadrante en el cual se encuentra el lado terminal del ángulo.



Las funciones trigonométricas de $\theta = -240^\circ$ se calculan ahora fácilmente

$$\operatorname{sen}(-240^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot(-240^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(-240^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sec(-240^\circ) = \frac{r}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

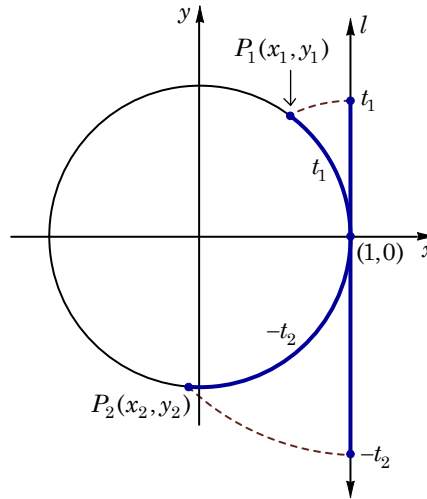
$$\tan(-240^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\csc(-240^\circ) = \frac{r}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Funciones trigonométricas de números reales

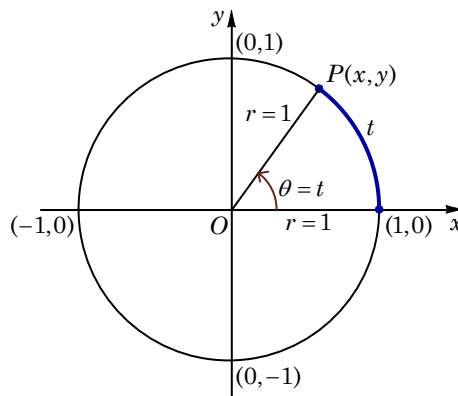
Hasta ahora las funciones trigonométricas han sido definidas para ángulos y no para números reales, sin embargo cuando la trigonometría se utiliza en física y en ingeniería, se requiere que el dominio de las funciones esté formado por números reales. Para hacer esta extensión de las funciones trigonométricas, es necesario establecer una correspondencia entre ángulos y números reales.

Considere el círculo de radio 1 con centro en el origen cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$, llamado **círculo unitario**. Considere también una recta vertical que pasa por el punto $(1,0)$, como se muestra en la figura



Al número real positivo t_1 se le hace corresponder el arco de circunferencia de longitud t_1 que va del punto $(1,0)$ al punto $P_1(x_1, y_1)$. De la misma forma, al número real negativo $-t_2$ se le hace corresponder el arco de longitud $-t_2$ que va del punto $(1,0)$ al punto $P_2(x_2, y_2)$. Si el número real t es mayor que 2π , el arco generará más de una vuelta sobre la circunferencia unitaria; pero de igual forma se le hace corresponder un punto $P(x, y)$ sobre la misma.

Una vez establecida la correspondencia entre números reales y arcos del círculo unitario, observe que la medida del ángulo central es la misma que la del arco que subtiende, de tal forma que para cada arco de longitud t hay un ángulo central cuya medida en radianes es el número real $\theta = t$, como se ilustra en la figura siguiente



Ahora que se ha establecido una correspondencia entre la medida de un ángulo y los números reales, se pueden definir las funciones trigonométricas utilizando el círculo unitario y un punto $P(x, y)$ que se encuentra sobre el mismo. Haciendo una analogía con las funciones trigonométricas de ángulos

se pueden obtener las expresiones para las funciones trigonométricas de números reales, por ejemplo para la función $\operatorname{sen} t$, se tiene

$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

Procediendo de manera similar se obtienen las 6 expresiones para las funciones trigonométricas de números reales.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Si t es un número real, y $P(x,y)$ es el punto sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ que corresponde al número t entonces:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} t = y & \tan t = \frac{y}{x}, \text{ si } x \neq 0 & \sec t = \frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ \cos t = x & \cot t = \frac{x}{y}, \text{ si } y \neq 0 & \csc t = \frac{1}{y}, \text{ si } y \neq 0 \end{array}$$

Las funciones trigonométricas de números reales también son llamadas **funciones circulares**, para distinguirlas de las funciones trigonométricas de ángulos.

Ejemplo 4: Calculando funciones trigonométricas de números reales

Utilice el círculo trigonométrico para obtener los valores exactos de las funciones trigonométricas del ángulo $t = -\frac{9\pi}{4}$.

Solución

Para calcular las funciones trigonométricas de un número real t , se calculan las correspondientes funciones de un ángulo $\theta = t$, cuya medida está expresada en radianes.

Como en los ejemplos anteriores, para establecer el cuadrante en el cual está el ángulo, primero se obtiene un ángulo β que sea coterminal con t , tal que $0 < \beta < 2\pi$

$$\beta = -\frac{9\pi}{4} + 4\pi = \frac{7\pi}{4}$$

Que es un ángulo que se encuentra en el cuarto cuadrante, como se muestra en la figura

El ángulo de referencia es

$$\theta_R = 2\pi - \beta = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Como el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$, las coordenadas del punto se obtienen utilizando la ecuación del círculo trigonométrico $x^2 + y^2 = 1$. Como el triángulo rectángulo corresponde a uno de los casos especiales en donde los dos catetos son iguales.

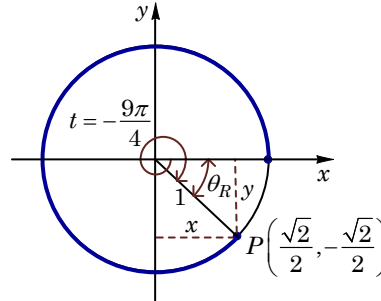
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como el ángulo está en el cuarto cuadrante el valor de y es negativo, entonces

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Los valores de las funciones trigonométricas son

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

$$\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$\csc\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Propiedades de las funciones trigonométricas

Dominio y rango

El dominio y el rango de las funciones trigonométricas se puede obtener directamente de la definición. Si t es un número real y $P(x,y)$ es el punto del círculo unitario correspondiente a t , de la definición de las funciones seno y coseno se tiene

$$\operatorname{sen} t = y \quad \text{y} \quad \operatorname{cost} = x$$

En ambas funciones el número t puede tomar cualquier valor, por lo tanto el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de todos los números reales. Por otro lado, de la ecuación del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, se tiene que

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$$

Al sustituir $x = \operatorname{cost}$ y $y = \operatorname{sen} t$ se obtiene

$$-1 \leq \operatorname{cost} \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$$

Por lo tanto el rango de las funciones seno y coseno es el intervalo cerrado $[-1,1]$.

Analizando las otras funciones de forma similar se tiene que

$$\tan t = \frac{y}{x}, \quad \cot t = \frac{x}{y}, \quad \sec t = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \csc t = \frac{1}{y}$$

El dominio de la función tangente y secante está formado por todos los números reales, excepto aquellos para los cuales $x = 0$, es decir que no están definidas para todos los ángulos que son coterminales de $\frac{\pi}{2}$ y de $\frac{3\pi}{2}$. Por lo que el dominio de éstas funciones es

$$(-\infty, \infty), \quad t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi. \text{ Donde } n \text{ es un número entero.}$$

El dominio de la función cotangente y cosecante está formado por todos los números reales, excepto aquellos para los cuales $y = 0$, es decir que no están definidas para todos los ángulos que son coterminales de 0 y de π . Por lo que el dominio de éstas funciones es

$$(-\infty, \infty), \quad t \neq n\pi. \text{ Donde } n \text{ es un número entero.}$$

Período de las funciones trigonométricas

Algunas funciones tienen la característica que sus valores se repiten en cierto intervalo. Estas funciones se llaman funciones **periódicas**.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN PERIÓDICA

Una función f es periódica si existe un número real positivo k tal que

$$f(x + k) = f(x)$$

Para todo x en el dominio de f . Al menor número k se le llama **período de f** .

Todas las funciones trigonométricas son periódicas pues sus valores se repiten en cada cierto intervalo. Las funciones seno y coseno tienen un período 2π , las funciones tangente y cotangente tienen período π , mientras que las funciones secante y cosecante tienen período 2π . La siguiente tabla resume las propiedades expuestas de las funciones trigonométricas

Función	Dominio	Rango	Período
$y = \text{sen } x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	2π
$y = \text{cos } x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	2π
$y = \text{tan } x$	$(-\infty, \infty), \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$	$(-\infty, \infty)$	π
$y = \text{cot } x$	$(-\infty, \infty), \quad t \neq n\pi$	$(-\infty, \infty)$	π
$y = \text{sec } x$	$(-\infty, \infty), \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$	$(-\infty, -1], [1, \infty)$	2π
$y = \text{csc } x$	$(-\infty, \infty), \quad t \neq n\pi$	$(-\infty, -1], [1, \infty)$	2π

Ejercicios de la sección 6.3

En los ejercicios 1 a 8 obtenga las seis funciones trigonométricas del ángulo θ , que tiene lado terminal en la recta que contiene al punto dado

1. $P(3, 2)$

2. $P(3, 5)$

3. $P(-5, 2)$

5. $P(-3, -6)$

4. $P(-3, 0)$

6. $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

7. $P(0, -5)$ 8. $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

En los ejercicios 8 a 16 encuentre las 5 funciones trigonométricas restantes del ángulo θ .

9. $\sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta < 0$

10. $\tan \theta = -1, \sin \theta < 0$

11. $\sec \theta = -\sqrt{2}, \tan \theta < 0$

12. $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cot \theta > 0$

13. $\cot \theta = \frac{1}{3}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

14. $\csc \theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \cos \theta = \frac{1}{2}$

15. $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{5}, 90^\circ < \theta < 180^\circ$

16. Obtenga las seis funciones trigonométricas de un ángulo en el segundo cuadrante que tiene lado terminal en una recta con pendiente $-\frac{3}{7}$

En los ejercicios 17 a 28, obtenga el ángulo de referencia del ángulo dado.

17. $\theta = 150^\circ$ 18. $\theta = 245^\circ$

19. $\theta = 333^\circ$ 20. $\theta = -160^\circ$

21. $\theta = 1356^\circ$ 22. $\theta = -520^\circ$

23. $\theta = \frac{13}{5}\pi$ 24. $\theta = 8$

25. $\theta = \frac{2}{5}\pi$ 26. $\theta = -\frac{1}{3}\pi$

27. $\theta = \frac{21}{4}\pi$ 28. $\theta = -\frac{31}{3}\pi$

En los ejercicios 29 a 36 utilice el ángulo de referencia para calcular el valor exacto de la función trigonométrica, sin utilizar calculadora.

29. $\sin 300^\circ$ 30. $\tan 225^\circ$

31. $\cos(-405^\circ)$ 32. $\sec 870^\circ$

33. $\cot\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ 34. $\csc\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$

35. $\sin\left(\frac{15}{4}\pi\right)$ 36. $\cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right)$

En los ejercicios 37 a 42 utilice el círculo trigonométrico para encontrar el valor exacto de la función

37. $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 38. $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$

39. $\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ 40. $\cot(-8\pi)$

41. $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ 42. $\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

En los ejercicios 43 a 46, sin usar calculadora obtenga el valor exacto de la expresión dada

43. $\tan 225^\circ - \cos 330^\circ \cos 60^\circ$

44. $\tan^2 45^\circ - 2\sin 330^\circ \cos(-120^\circ)$

45. $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

46. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sin \pi - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos \pi$

47. Obtenga los valores de las otras funciones trigonométricas si la coordenada x en un círculo unitario es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y el ángulo está en el cuarto cuadrante.

En un círculo trigonométrico el lado terminal de un ángulo θ contiene al punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Dibuje el ángulo en cada caso

48. $\pi - \theta$ 49. $-\theta$

50. $\frac{3\pi}{2} - \theta$ 51. $2\pi - \theta$

52. En un círculo trigonométrico el lado terminal de un ángulo θ contiene al punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Calcule las seis funciones trigonométricas del ángulo $\frac{3\pi}{2} - \theta$.

En los ejercicios 53 a 56 utilice el círculo trigonométrico para obtener dos valores de θ , $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, que satisfacen la ecuación trigonométrica dada.

53. $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 54. $\cot \theta = -\sqrt{3}$

55. $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 56. $\sec \theta = -\sqrt{2}$

En los ejercicios 57 a 60 utilice el círculo trigonométrico para obtener dos valores de θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que satisfacen la ecuación trigonométrica dada.

57. $\sin \theta = 0$ 58. $\tan \theta = -1$

59. $\csc \theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 60. $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$