PROBLEMA RESUELTO 5

Calcule el límite

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x+|x-2|-6}$$

Solución

Evaluando el límite del numerador se tiene

$$\lim_{x\to 2}(x-2)=2-2=0$$

Evaluando el límite del denominador se tiene

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+x+|x-2|-6\right)=2^2+2-|2-2|-6=0$$

Como ambos límites son iguales a cero, el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y es necesario realizar operaciones algebraicas para calcular el límite.

Como en el límite que se va a calcular hay una expresión con valor absoluto, se puede redefinir la misma utilizando la definición de valor absoluto

$$|x-2|=\begin{cases}-(x-2) & \text{si} \quad x<2\\ x-2 & \text{si} \quad x\geq 2\end{cases}$$

Como la función no es la misma para valores mayores que 2 que para valores menores que 2, es necesario calcular el límite por la izquierda y el límite por la derecha en $x=2$

Para números mayores que 2 se tiene $|x-2|=x-2$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2+x+|x-2|-6} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2+x+(x-2)-6}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2+2x-8}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{(x+4)(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x+4}\\ &= \frac{1}{2+4}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Para números menores que 2 se tiene que $|x-2|=-(x-2)$, entonces

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2+x+\left|x-2\right|-6} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2+x-(x-2)-6}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x^2+x+\left|x-2\right|-6} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Respuesta:

Como el límite por la derecha y el límite por la izquierda son diferentes se concluye que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x+\left|x-2\right|-6} \quad \text{no existe}$$