5.7 Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas

OBJETIVOS

- Resolver problemas sobre el crecimiento y decrecimiento de poblaciones cuyo modelo es la ley de crecimiento natural.
- Resolver problemas crecimiento y decrecimiento radioactivo en los cuales el modelo es un modelo exponencial.
- Resolver problemas que tienen como modelo la ley de enfriamiento de Newton.
- Resolver problemas diversos que tienen como modelo una función que tiene funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones exponenciales y logarítmicas han sido de mucha utilidad en la solución de problemas relacionados con el crecimiento y decrecimiento de poblaciones, en el estudio de la desintegración de materiales radioactivos y en la solución de muchos problemas relacionados con fenómenos que aumentan o disminuyen significativamente con el transcurso del tiempo. El planteamiento y formulación de estos modelos matemáticos no es sencillo y generalmente se estudian en cursos de ecuaciones diferenciales. En ésta sección se resuelven problemas utilizando algunos modelos previamente construidos.

Ley crecimiento natural

La ley de crecimiento natural expresa que la razón a la cual aumenta o disminuye una población en el tiempo es proporcional al número de individuos presentes en la población en ese instante.

Utilizando la ley anterior se puede construir el modelo siguiente

Ley de crecimiento natural

Si P_0 es el número de elementos de una población en el tiempo $t = 0$, entonces la población $P(t)$ en el tiempo t está dada por

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Donde k es la tasa de crecimiento relativo. Si $k > 0$ la población aumenta y si $k < 0$ la población disminuye $k < 0$.

Ejemplo 1: Crecimiento de una población

El número de usuarios del servicio eléctrico en el departamento de Guatemala en el año 1985 era aproximadamente de 200,000 y en el año 2000 el número de usuarios era aproximadamente de 600,000. Suponiendo que el número de usuarios crece de acuerdo a la ley de crecimiento natural.

a. Construya un modelo para calcular el número de usuarios del servicio en función del tiempo t expresado en años.

b. Calcule el número de usuarios estimado para el año 2,015.

c. Determine el año en el cual el número de usuarios será de 2 millones de usuarios

Solución

a. Debemos construir el modelo exponencial de la forma

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Si hacemos que $t = 0$, corresponda al año 1985, se tiene que $t = 15$ corresponde al año 2,000 y $t = 30$ corresponde al año 2,015.

Ahora, si $t = 0$, la población es $P = 200{,}000$. Sustituyendo esta información en el modelo se obtiene

$$200{,}000 = P_0 e^{k(0)}$$

$$200{,}000 = P_0(1)$$

$$P_0 = 200{,}000$$

Para $t = 15$ el número de usuarios es de 600,000. Sustituyendo esta información y despejando el valor de k se tiene.

$$600{,}000 = 200{,}000 e^{k(15)}$$

$$\frac{600{,}000}{200{,}000} = e^{15k}$$

$$3 = e^{15k}$$

Aplicando logaritmos naturales a ambos lados para despejar el valor de k.

$$\ln 3 = \ln\left(e^{15k}\right)$$

$$\ln 3 = 15k \ln e$$

$$\ln 3 = 15k(1)$$

$$k = \frac{\ln 3}{15} \approx 0.07324$$

Entonces el modelo exponencial que predice el número de usuarios del servicio eléctrico es

$$P(t) = 200{,}000 e^{0.07324t}$$

b. En el año 2,015 se tiene que $t = 30$. Evaluando en el modelo obtenido en el inciso anterior

$$P(30) = 200{,}000 e^{0.07324(30)} = 1{,}799{,}955.76$$

Es decir que el número de usuarios en el año 2,030 será aproximadamente de 1,800,000 usuarios.

c. Para estimar el año en el cual habrá 2 millones de usuarios hay que sustituir $P = 2{,}000{,}000$ en el modelo y despejar t

$$2{,}000{,}000 = 200{,}000 e^{0.07324t}$$

$$\frac{2{,}000{,}000}{200{,}000} = e^{0.07324t}$$

$$\ln(10) = 0.07324t \ln e$$

$$t = \frac{\ln 10}{0.07324} \approx 31.4389$$

Concluimos que el número de usuarios será de 2 millones 31.44 años después de del año 1,985.

$$1{,}985 + 31.44 = 2{,}016.44$$

Aproximadamente en el mes de mayo del año 2,016.

Desintegración radioactiva

Las sustancias radioactivas se desintegran a una razón que es proporcional a la masa de la sustancia que aún no se ha desintegrado. La ley de crecimiento natural, se puede aplicar sin ningún problema en estos casos, con la diferencia que la cantidad de masa radioactiva siempre está disminuyendo, por lo que la constante k es negativa.

Desintegración radioactiva

Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radioactiva en el tiempo $t = 0$, entonces la masa que queda en el tiempo t está dada por

$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

Donde m_0 es la masa inicial de la sustancia y k es la tasa de decaimiento radioactivo.

En algunos problemas de desintegración radioactiva se hace referencia a **la vida media** de la sustancia, la cual se define el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre la mitad de la masa radioactiva.

Ejemplo 2: Desintegración radioactiva

La vida media del radio 256 es aproximadamente de 1590 años. Suponga que se tiene una muestra que actualmente tiene una masa de 5 gramos y que comenzó a desintegrarse hace 5000 años. ¿Cuál era la masa inicial de la sustancia?

Solución

Si m_0 es la masa inicial de radio256, el modelo de desintegración radioactiva es

$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

Como la vida media es de 1590 años entonces la masa se habrá reducido a la mitad transcurrido ese tiempo, es decir que si $t = 1590$, $m = \frac{1}{2}m_0$.

Sustituyendo esta información en la ecuación se puede obtener el valor de k.

$$\frac{1}{2}m_0 = m_0 e^{-k(1590)}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-k(1590)}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k(1590)\ln e$$

$$k = \frac{\ln 1 - \ln 2}{1590} = \frac{-\ln 2}{-1590} \approx 0.0004359$$

Por lo que el modelo de desintegración para el radio 256 es

$$m(t) = m_0 e^{-0.0004359t}$$

Para encontrar la masa inicial sabemos que $m = 5$, cuando $t = 5000$. Al sustituir esta información en el modelo se puede despejar la masa inicial

$$\begin{aligned} 5 &= m_0 e^{-0.0004359(5000)} \\ 5 &= m_0(0.1131) \\ m_0 &= \frac{5}{0.1131} = 44.21 \end{aligned}$$

Por lo que la cantidad inicial de radio 256 era aproximadamente de 44.21 gramos.

Ejemplo 3: Calculando la antigüedad de un fósil

En una excavación reciente se encontró el cuerpo de un cacique maya enterrado en Tikal. Se determinó que el cuerpo contenía únicamente el 72% del carbono 14 original. Determine la antigüedad del cuerpo encontrado, sabiendo que la vida media del carbono 14 es de 5730 años.

Solución

Para resolver este problema hay que suponer que en el cuerpo de un ser vivo, hay una cantidad inicial m_0 de carbono 14. Al morir, el carbono 14 del cuerpo, comienza a desintegrarse según la ley de desintegración radioactiva. El modelo para este problema es

$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

Utilizando la vida media del carbono 14, se puede encontrar el valor de la constante k, como en el ejemplo anterior, es decir que cuando $t = 5730$ la masa es $m = \frac{1}{2}m_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_0 &= m_0 e^{-k(5730)} \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -k(5730) \\ k &= \frac{\ln 2}{5730} \approx 0.000121 \end{aligned}$$

Como en los restos encontrados había 72% de carbono 14 se tiene que $m = 0.72m_0$. Sustituyendo esta información en el modelo y despejando t

$$\begin{aligned} 0.72m_0 &= m_0 e^{-kt} \\ \ln(0.72) &= (-kt)\ln e \\ t &= \frac{\ln(0.72)}{-k} = \frac{\ln(0.72)}{-\frac{\ln 2}{5730}} = -\frac{5730\ln(0.72)}{\ln 2} \\ t &= 2715.63 \end{aligned}$$

Es decir que el cuerpo del cacique maya fue enterrado hace aproximadamente 2,716 años.

Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento establece que la razón a la cual se enfría (o se calienta) un objeto es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio en el cual es colocado. Utilizando ecuaciones diferenciales, se puede demostrar el modelo matemático que se presenta a continuación

Ley de enfriamiento de Newton

Si T_0 es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y el medio que lo rodea y si el medio que lo rodea tiene una temperatura constante T_s, entonces la temperatura del objeto en el tiempo t está dada por

$$T(t) = T_s + T_0 e^{kt}$$

Donde k es una constante que depende de cada objeto.

Ejemplo 4: Enfriamiento de un pavo

Un pavo horneado se saca del horno donde se ha cocinado a una temperatura de 200ºC. El pavo se deja enfriar en una mesa donde la temperatura es de 20ºC. Si la temperatura del pavo es de 150ºC después de media hora. ¿Cuánto tiempo deben esperar para comerlo si la temperatura del mismo debe ser de 50ºC?

Solución

El modelo exponencial que hay que utilizar pare resolver el problema es

$$T(t) = T_s + T_0 e^{kt}$$

Como T_s es la temperatura del ambiente donde se coloca el pavo, se tiene que $T_s = 20$. Por otro lado T_0 es la diferencia de temperatura inicial y la del medio donde se coloca el pavo, entonces $T_0 = 200 - 20 = 180$

El modelo ahora puede expresarse como

$$T(t) = 20 + 180e^{kt}$$

Para encontrar k utilizamos el hecho de que la temperatura se ha reducido a 150 cuando han transcurrido 30 minutos. Al sustituir la información y despejar k se obtiene

$$150 = 20 + 180e^{k(30)}$$

$$\frac{130}{180} = e^{30k}$$

$$\ln\left(\frac{13}{18}\right) = 30k \ln e$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{13}{18}\right)}{30} \approx -0.0108$$

Para calcular el tiempo requerido para que la temperatura descienda a 50ºC, sustituimos $T = 50$ y despejamos t.

$$50 = 20 + 180e^{kt}$$

$$\frac{30}{180} = e^{kt}$$

$$\ln\left(\frac{3}{18}\right) = kt\ln e$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{3}{18}\right)}{k} \approx \frac{\ln\left(\frac{3}{18}\right)}{-0.0108} = 165.9$$

Es decir que hay que esperar aproximadamente 166 minutos para que el pavo llegue a una temperatura de 50ºC.

Ejercicios de la sección 5.6

1. En 1990 la población de la ciudad era de 900,000 personas y aumenta a una razón de 2.8% anual. Calcule el año en el cual la población será de 2,000,000.

2. En el año 2,000 la población de cierta ciudad era de 12 millones y para el año 2,010 la población aumentó a 12 millones.

a. Construya un modelo exponencial que exprese la población en función del tiempo.

b. utilice el modelo para calcular la población en el año 2,020.

3. En una isla desierta se coloca una población de 100 venados. Después de 5 años se hace un censo de la población obteniendo un total de 270 venados. Suponiendo que la población aumenta de acuerdo a la ley de crecimiento natural, estime la población de venados cuando han transcurrido 22 años.

4. Después de una carrera, la razón R a la cual disminuye el pulso de un corredor está dada por la función

$$R(t) = 145e^{-0.092t}, \quad 0 \le t \le 15$$

Donde el tiempo está expresado en minutos. Determine el tiempo requerido para que el corredor tenga un pulso de 80 latidos por minuto.

5. Una fábrica de maquila contrata a un empleado para que aprenda a manejar cierta maquinaria para la fabricación de ropa. La curva de aprendizaje para un empleado promedio está dada por la función logística

$$N(t) = \frac{200}{4 + 21e^{-0.1t}}$$

donde N es el número de piezas armadas por día, después de t días de capacitación.

a. Calcule cuantas piezas arma un empleado promedio el primer día de capacitación.

b. Calcule el número de piezas armadas a los 10 días de capacitación.

c. Aproxime al día más cercano, ¿cuál es el número de días que le tomará a un empleado armar 40 piezas?

d. Utilice un dispositivo graficador para dibujar la gráfica de la función en el intervalo $0 \le t \le 100$. Use la gráfica para estimar el número de piezas que arma un empleado promedio que lleva muchos años de servicio en la empresa.

6. La ecuación de la demanda de cierto producto

$$p = \frac{50}{\log(q + 2)}$$

donde p es el precio del producto en quetzales y q es el número de cientos de unidades demandadas del mismo

a. Calcule el precio del producto si se demandan 500 unidades.

b. Calcule el número de unidades demandadas si el precio del producto es Q50.

7. Juan invierten Q12,000 en una cuenta de ahorros en La Cooperativa el Esfuerzo que paga el 4.5% de interés con capitalización mensual. Determine el tiempo que debe transcurrir para que la inversión se duplique.

8. La población de China en 1970 era de 750 millones de personas y está creciendo aproximadamente a una tasa del 4% al año. Suponiendo que la tasa de crecimiento se mantiene constante, estime el año en el cual la población de China alcanzará los 2,000 millones de personas.

9. La empresa exportadora de granos El Semillero, ha estimado que con la demanda de maíz que se ha generado en el mundo debido a la producción de biocombustibles; el número de toneladas vendidas puede ser modelado por medio de la ecuación

$$N(t) = 5{,}000e^{0.4t}$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses a partir de enero de éste año. Calcule cuantos meses deben transcurrir para que las ventas de la empresa sean de 15,000 toneladas.

10. El periódico El Informante tiene una circulación de 1 millón de ejemplares, mientras que el periódico El Fotográfico tiene una circulación de 2 millones de ejemplares. Si el primero aumenta su circulación en 2% al mes, mientras que el segundo disminuye su circulación en 1% al mes. Calcule cuánto tiempo deberá transcurrir para que ambos periódicos tengan la misma circulación.

11. Don Amilcar ha comprado un automóvil de último modelo en la agencia de autos Super Autos. Aunque el vendedor no se lo explicó, el averiguó por cuenta propia que su nueva adquisición se deprecia rápidamente y que el valor de su auto puede ser calculado utilizando la ecuación

$$V(t) = 120{,}000(0.88)^t$$

donde t es el tiempo en años transcurrido desde la compra y V es el valor del automóvil en quetzales.

a. Determine el costo inicial del automóvil.

b. Calcule el valor estimado del auto a los 3 años de uso.

c. ¿A los cuántos el auto tendrá un valor de rescate de Q50,000

12. El gerente de la empresa Princes Burguer que se dedica a la venta de hamburguesas sabe que las ventas del producto disminuyen si se suspende la publicidad en televisión. El modelo que le permite estimar el número de unidades vendidas mensualmente después de finalizada la campaña publicitaria

$$N(t) = 20{,}000e^{-0.15t}$$

Donde N es el número de unidades vendidas y t es el tiempo en meses que ha transcurrido desde que se finalizó la campaña publicitaria.

a. Calcule las ventas de la empresa cuando el producto es publicitado.

b. Calcule las ventas 5 meses después de suspendida la campaña.

c. Si la empresa tiene planificado reiniciar la campaña publicitaria cuando sus ventas hayan caído al 60%, ¿Cuánto tiempo debe transcurrir desde que se finalizó la campaña publicitaria hasta que se inicia la publicidad nuevamente?

13. La Unión Internacional de Naciones UIN, utiliza el siguiente modelo logístico para estimar la población de nuestro planeta

$$P(t) = \frac{280}{4 + 66e^{-0.0238t}}$$

Donde $t = 0$ corresponde al año 1976 y la población del mundo está en billones de personas.

a. Estime la población de la tierra para el año 1,976

b. Estime la población de la tierra en el año 2,010.

c. Calcule el año en el cual la población de la tierra será aproximadamente de 20 billones de personas.

d. Utilice una computadora o una calculadora con capacidad de dibujar gráficas para dibujar la gráfica de la función $P(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 500$

e. Utilice la gráfica para calcular cual es la población máxima soportada por el planeta.

14. Según datos de la Dirección General de Estadística, en el mes de enero de 1990 el índice de precios al consumidor en Guatemala era de 270.8, mientras que en enero de 1995 el índice aumentó a 657.8.

a. Calcule el incremento porcentual promedio por año durante ese período.

b. Exprese el índice de precios al consumidor por medio de la fórmula $I(t) = Ce^{kt}$, donde $t = 0$ corresponde al año 1990.

c. Suponiendo que el modelo obtenido en el inciso anterior se mantiene, calcule el índice de precios al consumidor para el 2000.

d. ¿En qué año el índice de precios al consumidor tendrá un valor de 2,000?

15. Una cultivo de bacterias tiene un tamaño inicial de 40,000 bacterias. Si transcurridas 40 horas la población ha aumentado a 60,000 bacterias. ¿Cuándo habrá 80,000 bacterias en el cultivo?

16. En número de bacterias de un cultivo está dado por la fórmula $N(t) = 500e^{0.45t}$, donde t está dado en horas.

a. ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo de ésta población?, exprésela en porcentaje.

b. ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?

c. ¿Después de cuántas horas será de 10,000 el número de bacterias?.

17. El conteo en un cultivo de bacterias fue de 400 después de 2 horas y de 25,600 después de 6 horas.

a. ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?

b. Determine una fórmula para en número de bacterias después de t horas.

c. Determine el número de bacterias después de 4.5 horas.

d. ¿Cuándo llegará a 50,000 el número de bacterias?

18. Una sustancia radioactiva tiene una vida media de 920 años. Si hay 15 gramos de dicha sustancia presentes inicialmente, ¿cuánto quedará al cabo de 300 años?

19. La vida media del radio 226 es de 1590 años. Suponga que se tiene una muestra de 22 miligramos.

a. Obtenga una fórmula para la masa que queda después de t años.

b. ¿Cuánto quedará de la muestra después de 4,000 años?

c. ¿Después de cuánto tiempo quedará solamente 18 mg?

20. El “Estroncio 90” se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento, y tiene una vida media de 4 Hrs. Con estos datos:

a. Determine el modelo que describe la desintegración.

b. ¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que se “desintegre” en 75% de su masa inicial?

c. ¿Cuánto de “Estroncio 90” hay después de 6 Hrs?

21. Un artefacto de madera de una tumba antigua contiene 65% del carbono14 que está presente en los árboles vivos. Si la vida media del carbono14 es de 5,730 años, calcule hace cuántos años se fabricó el artefacto.

22. Se saca un trozo de carne congelada de un refrigerador, donde la temperatura es de 0ºC y se coloca sobre una mesa en la cocina, donde la temperatura es de 14ºC. Si después de 30 minutos el trozo de carne ha alcanzado una temperatura de 5ºC. Calcule el tiempo requerido para que alcance una temperatura de 15ºC.

23. Un pavo asado se saca del horno cuando su temperatura es de 185 grados y se coloca sobre la mesa en una habitación donde la temperatura es de 20 grados. Si la temperatura del pavo es de 100 grados después de 45 minutos

a. Calcule la temperatura del pavo después de 2 horas.

b. En cuanto tiempo se habrá enfriado el pavo a 50 grados.

24. El aumento de la altura de cierta especie de árboles en pies, se describe a menudo mediante una ecuación logística. Suponga que la altura h de t años de edad es

$$h = \frac{120}{1 + 200e^{-0.2t}}$$

a. Calcule la altura de un árbol a los 10 años.

b. ¿A qué edad un árbol medirá 50 pies?

25. El cuerpo humano elimina una medicina a través de la orina. Suponga que para una dosis de 10 miligramos la cantidad que queda en el cuerpo es $A(t) = 10(0.8)^t$ y para que sea efectiva deben haber al menos 2 mg. en el cuerpo.

a. ¿En cuánto tiempo quedarán 2 mg?

b. Calcule la vida media del medicamento.

26. La población de cierta ciudad obedece la ley de crecimiento exponencial. Después de 50 años, la población se ha triplicado. ¿A los cuántos años la población era el doble de la población inicial?

27. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que una inversión triplique su valor si la tasa de interés anual es del 6% capitalizado trimestralmente?

28. Suponga que cierta sustancia radioactiva se desintegra a tal ritmo que, al final de cualquier día sólo queda la tercera parte de la cantidad presente al comienzo del día.

a. Si inicialmente hay 300 gramos de la sustancia, exprese la cantidad que queda de la sustancia en términos de t, t en días.

b. ¿Qué cantidad de la sustancia queda al final de una semana?

29. La cantidad de Carbono 14 en un organismo se descompone de acuerdo a la ley de decaimiento natural El Carbono 14 tiene una vida media de 5,600 años. Si cuando un fósil es descubierto se encuentra que contiene el 15% del Carbono 14 original. ¿Cuál es la edad aproximada del fósil?

30. En un trozo de madera muy antigua se encontró que el 85.5% del Carbono 14 presente originalmente se había desintegrado. Si la vida media del Carbono 14 es de aproximadamente 5,600 años.

a. Construya un modelo exponencial que exprese la cantidad de carbono 14 presente en el trozo de madera en función del tiempo.

b. Determine la edad aproximada del trozo de madera.

31. Un Isotopo de sodio tiene una vida media de 15 horas. Si tenemos una muestra de 2 gramos de este isotopo:

a. Encuentre la cantidad de sodio que queda después de 60 horas.

b. Encuentra la cantidad de sodio que queda después de t horas.

c. Estime el tiempo requerido para que queden tan solo 0.01 gramos.

32. Un pavo es sacado del horno y llevado a afuera donde la temperatura del ambiente es de 16°C. Después de 1 minuto la temperatura del pavo es de 50°C y después de 5 minutos de 33.75°C. Determine la temperatura del horno.