PROBLEMA RESUELTO 5

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x<-2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad -2\le x\le 1 \\ 2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a. Calcule $\lim_{x\to -2} f(x)$.

b. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$

c. Dibuje la representación gráfica de la función y utilice la gráfica para verificar los resultados obtenidos analíticamente.

Solución

a. Para calcular $\lim_{x\to -2} f(x)$, es preciso observar que para valores de x a la izquierda de -2 ($x<-2$) la fórmula correspondiente es $x+2$; mientras que para valores ligeramente mayores que -2 ($x>-2$) la fórmula correspondiente es x^2+1. Cuando se tienen fórmulas diferentes, por la izquierda y por la derecha del valor en el cual se está calculando el límite, es necesario usar límites laterales.

Calculando el límite por la izquierda de $x=-2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-}(x+2)\\ &= (-2)+2\\ &= 0\end{aligned}$$

Calculando el límite por la derecha de $x=-2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+}(x^2+1)\\ &= (-2)^2+1\\ &= 5\end{aligned}$$

Como el límite por la izquierda es 0 y el límite por la derecha es 5 se concluye que

$\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe.

b. Para calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$ se procede de forma similar al inciso anterior ya que por la izquierda y por la derecha de $x=1$ la función tiene fórmulas diferentes.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = (1)^2+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2) = 2$$

Como el límite por la izquierda es igual que el límite por la derecha se concluye que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

c. La figura muestra la representación gráfica de la función. Observe que en $x = -2$ la gráfica tiene un salto, lo que nos indica que el límite ahí no existe, mientras que en $x = 1$ la gráfica no tiene salto, lo que nos indica que el límite si existe.