

PROBLEMA RESUELTO 4

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right)$$

Solución

Observe que, en este problema la función está compuesta por la diferencia de dos expresiones racionales.

En la primera expresión racional, cuando x se aproxima a -4 por la izquierda, el denominador se aproxima a cero con valores positivos, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2}{x^2 + 3x - 4} = +\infty$$

En la segunda expresión racional, cuando x se aproxima a -4 por la izquierda, el denominador se aproxima a cero con valores negativos, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{3}{x + 4} = -\infty$$

Si se intenta calcular el límite como la suma de los límites de las dos expresiones racionales se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right) &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{3}{x + 4} \\ &= +\infty - \infty \end{aligned}$$

La expresión $+\infty - \infty$ es una forma indeterminada y debemos elegir otro procedimiento para calcular el límite.

Lo que procede en este caso es desarrollar la suma de fracciones y simplificar la expresión resultante. Luego calcular el límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right) &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{2}{(x + 4)(x - 1)} + \frac{3}{x + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2 + 3(x - 1)}{(x + 4)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{3x - 1}{(x + 4)(x - 1)} \end{aligned}$$

Ahora se calcula el límite del numerador y del denominador para establecer el tipo de límite se está calculando

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} (3x - 1) = 3(-4) - 1 = -13$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} (x + 4)(x - 1) = (-4 + 4)(-4 - 1) = (0)(-5) = 0$$

Como el límite del numerador es una constante y el límite del denominador es 0, el límite es tipo infinito y lo calculamos evaluando un número ligeramente menor que -4 en la función

$$\frac{3(-4.001) - 1}{(-4.001 + 4)(-4.001 - 1)} = \frac{-13.003}{(-0.001)(-5.001)} = -2599.7$$

La función tiene valores negativos muy grandes, por lo que podemos concluir que

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right) = -\infty$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función, donde puede verse que la recta $x = -4$ es una asíntota vertical.

