

PROBLEMA RESUELTO 4

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 7x - 5}{2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3}$$

Solución

Calculando el límite del numerador

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (6x^2 - 7x - 5) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(-\frac{1}{2}\right) - 5 = 0$$

Calculando el límite del denominador

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$$

El límite que se va a calcular tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que se deben realizar operaciones algebraicas para cancelar el factor que produce la indeterminación.

Factorizando el numerador se tiene

$$6x^2 - 7x - 5 = \frac{(6x - 10)(6x + 3)}{2 \times 3} = (3x - 5)(2x + 1)$$

Para factorizar el denominador se utiliza división sintética, sabiendo que $x = -\frac{1}{2}$ es un cero del denominador.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & -5 & 1 & -4 & -3 & \\ & -1 & 3 & -2 & 3 & \\ \hline & 2 & -6 & 4 & -6 & 0 \end{array}$$

Como el residuo en la división es cero se tiene que $x = -\frac{1}{2}$ es una raíz del polinomio

y $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ es un factor. El polinomio se puede factorizar como

$$\begin{aligned} 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^3 - 6x^2 + 4x - 6) \\ &= (2x + 1)(x^3 - 3x^2 + 2x - 3) \end{aligned}$$

Al sustituir los dos polinomios factorizados y simplificar se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 7x - 5}{2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(3x - 5)(2x + 1)}{(2x + 1)(x^3 - 3x^2 + 2x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{3x - 5}{x^3 - 3x^2 + 2x - 3}\end{aligned}$$

Después de cancelar el factor común al numerador y al denominador, el límite se puede calcular por evaluación

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 7x - 5}{2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{3x - 5}{x^3 - 3x^2 + 2x - 3} \\ &= \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) - 5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3} \\ &= \frac{-\frac{13}{2}}{-\frac{39}{8}} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 7x - 5}{2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 3} = \frac{4}{3}$$
