PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule el límite

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$$

Solución

Al evaluar el límite del numerador se tiene

$$\lim_{x\to 1^-} (x-1) = 1-1 = 0$$

Calculando el límite del denominador

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\sqrt{2x-x^2}-1\right) = \sqrt{2(1)-(1)^2}-1 = 0$$

Como ambos límites son iguales a 0, el límite tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, y se deben realizar racionalizar el denominador para eliminar el factor que hace que el límite tenga forma indeterminada.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{\sqrt{2x-x^2}+1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}{\left(2x-x^2\right)-1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}{-\left(x^2-2x+1\right)} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}{-(x-1)^2} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{-(x-1)}
\end{aligned}$$

Como se ha eliminado el factor que hacía que el límite fuera indeterminado, se procede a calcular nuevamente el límite del numerador y el límite del denominador, obteniéndose ahora en el numerador

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\sqrt{2x-x^2}+1\right) = \sqrt{2(1)-(1)^2}+1 = 2$$

El límite del denominador es

$$\lim_{x\to 1^-} -(x-1) = -(1-1) = 0$$

Como el límite es del tipo infinito, evaluamos la última función en un número que se aproxime a 1 por la izquierda, para establecer si el infinito es positivo o bien si es negativo.

Evaluando en 0.999 se obtiene

$$\frac{\sqrt{2(0.999)-(0.999)^2}+1}{-\left(0.999-1\right)}=\frac{1.999}{-(-0.001)}=1999.9$$

La función toma valores positivos muy grandes, por lo que podemos concluir que

Respuesta:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}=+\infty$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función, donde claramente se puede ver que la recta $x=1$ es una asíntota vertical de la función