

PROBLEMA RESUELTO 3

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + x - 18}{(4x)^{1/3} - 2}$$

Solución

Evaluando el límite del numerador se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + x - 18) = 4(2)^2 + (2) - 18 = 0$$

Evaluando el límite del denominador se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 2} ((4x)^{1/3} - 2) = (4 \cdot 2)^{1/3} - 2 = 0$$

Como ambos límites son iguales a cero, el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y es necesario realizar operaciones algebraicas para calcular el límite.

Para racionalizar el denominador que contiene raíces cúbicas hay utilizar el producto notable

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Cuando los exponentes son fraccionarios el producto anterior se puede expresar como

$$a - b = (a^{1/3} - b^{1/3})(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})$$

Utilizando el producto anterior para calcular el límite se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + x - 18}{(4x)^{1/3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + x - 18}{(4x)^{1/3} - (8)^{1/3}} \cdot \frac{(4x)^{2/3} + (4x)^{1/3}(8)^{1/3} + (8)^{2/3}}{(4x)^{2/3} + (4x)^{1/3}(8)^{1/3} + (8)^{2/3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x + 9)(x - 2)((4x)^{2/3} + (4x)^{1/3}(8)^{1/3} + (8)^{2/3})}{4x - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x + 9)(x - 2)((4x)^{2/3} + (4x)^{1/3}(2) + 4)}{4(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x + 9)((4x)^{2/3} + (4x)^{1/3}(2) + 4)}{4} \end{aligned}$$

El límite del denominador en la última expresión es diferente de cero y se puede calcular por evaluación,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + x - 18}{(4x)^{1/3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x + 9)((4x)^{2/3} + (4x)^{1/3}(2) + 4)}{4} \\ &= \frac{(8 + 9)((8)^{2/3} + 2(8)^{1/3} + 4)}{4} \\ &= \frac{17(4 + 4 + 4)}{4} \\ &= (17)(3) \\ &= 51\end{aligned}$$

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + x - 18}{(4x)^{1/3} - 2} = 51$$
