

PROBLEMA RESUELTO 2

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{2 - \sqrt{x-1}}$$

Solución

Calculando el límite del numerador

$$\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{4x+5} - 5) = \sqrt{4(5)+5} - 5 = 5 - 5 = 0$$

Calculando el límite del denominador

$$\lim_{x \rightarrow 5} (2 - \sqrt{x-1}) = 2 - \sqrt{5-1} = 2 - 2 = 0$$

Como el límite del numerador es 0 y el límite del denominador también es 0, resulta que el límite de la función tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ será necesario realizar operaciones algebraicas para cancelar el factor que produce la forma indeterminada. Racionalizando el numerador se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{2 - \sqrt{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{2 - \sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{4x+5} + 5}{\sqrt{4x+5} + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(4x+5) - 25}{(2 - \sqrt{x-1})(\sqrt{4x+5} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x - 20}{(2 - \sqrt{x-1})(\sqrt{4x+5} + 5)} \end{aligned}$$

Observe que el producto en el denominador no se ha desarrollado. Ahora hay que racionalizar la expresión $2 - \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{2 - \sqrt{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x - 20}{(2 - \sqrt{x-1})(\sqrt{4x+5} + 5)} \cdot \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(4x - 20)(2 + \sqrt{x-1})}{(4 - (x-1))(\sqrt{4x+5} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4(x-5)(2 + \sqrt{x-1})}{(5-x)(\sqrt{4x+5} + 5)} \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 el numerador y el denominador para invertir el orden del factor $5-x$ se podrá cancelar el factor que produce la forma indeterminada

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{2 - \sqrt{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-4(x-5)(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(\sqrt{4x+5} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-4(2 + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{4x+5} + 5)}\end{aligned}$$

Finalmente, podemos calcular el límite por evaluación

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{2 - \sqrt{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-4(2 + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{4x+5} + 5)} \\ &= \frac{-4(2 + \sqrt{5-1})}{(\sqrt{4(5)} + 5 + 5)} \\ &= \frac{-4(4)}{(5 + 5)} \\ &= -\frac{8}{5}\end{aligned}$$

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{2 - \sqrt{x-1}} = -\frac{8}{5}$$
