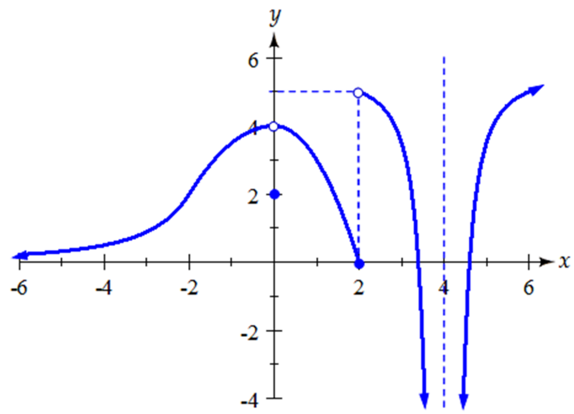
PROBLEMA RESUELTO 1

La figura siguiente muestra la gráfica de una función f. En este ejemplo se utiliza la gráfica para calcular lo que se indica en cada inciso:



a. $f(0)$ **e.** $\lim_{x\to 2} f(x)$ **i.** $\lim_{x\to 4} f(x)$

b. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **f.** $f(2)$ **j.** $f(4)$

c. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **g.** $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ **k.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

d. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **h.** $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ **l.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$

Solución

a. Para calcular $f(0)$ observe si en la gráfica hay alguna imagen asignada a $x = 0$, vea que hay un punto sólido en $y = 2$, lo que significa que la imagen asignada es $f(0) = 2$.

b. Para calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ observe que cuando x se aproxima a 0 tanto por la derecha como por la izquierda los valores de $f(x)$ se aproximan a 4. Note que x se aproxima a 0, pero no es igual a 0. Por lo que se concluye que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$$

c. Para calcular $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ debe observar el comportamiento de la gráfica cuando x se aproxima a 2 por el lado izquierdo, donde puede verse que la función está descendiendo hacia el valor $y = 0$, de donde se tiene que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$$

d. Para calcular $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ observe que a medida que x se aproxima a 2 por la derecha, los valores de $f(x)$ están aumentando y acercándose al valor $y = 5$. Observe también que la gráfica tiene un vacío en ese punto lo que significa que $f(2) \neq 5$, pero eso no cambia el hecho que $f(x)$ se aproxima a 5 cuando x se aproxima a 2 por la derecha, por lo que

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

e. Para calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$ utilizamos los resultados de los incisos anteriores, como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ se concluye que $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe

f. Para calcular $f(2)$ debe buscar un punto sólido en la gráfica (si este existe) en $x = 2$. Puede verse que la imagen asignada es $y = 0$, por lo que

$$f(2) = 0$$

g. Para calcular $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ observe que a medida que x se aproxima a 4 por la izquierda, los valores de $f(x)$ son negativos cada vez más grandes. Es decir que la función está tendiendo al infinito negativo, de donde se concluye que

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$$

h. Cuando x se aproxima a 4 por la derecha, se observa que los valores de $f(x)$ tienden al infinito negativo por lo que se concluye que

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$$

i. Para calcular $\lim_{x \to 4} f(x)$ nos apoyamos en los límites laterales calculados en los incisos anteriores, como $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$, se concluye que

$$\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty$$

Ninguno de los 3 límites calculados en los incisos anteriores existe, decir que el límite es $-\infty$, es una forma de expresar matemáticamente como se está comportando la función. Para que un límite exista debe ser un número real.

j. $f(4)$ no está definida ya que al observar la gráfica no hay un punto asignado a $x = 4$.

k. Para calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ se debe observar el comportamiento de la función cuando x toma valores negativos muy grandes. Como puede verse en la gráfica, cuando x tiende a $-\infty$, los valores de $f(x)$ se están acercando a 0. Por lo que se obtiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

l. Al observar la gráfica notamos que cuando x toma valores muy grandes, los valores de $f(x)$ están aumentando sin límite, la flecha apuntando hacia arriba nos confirma la observación, por lo que se concluye que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$