UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-1-M-2-00-2013

Curso:	Matemática Básica 1
Código del Curso:	101
Semestre:	Segundo Semestre 2013
Tipo de Examen:	Primer Examen Parcial
Nombre de la persona que resolvió el examen:	Pablo César Méndez Rodas
Nombre de la persona que revisó el examen:	Inga. Silvia Hurtarte

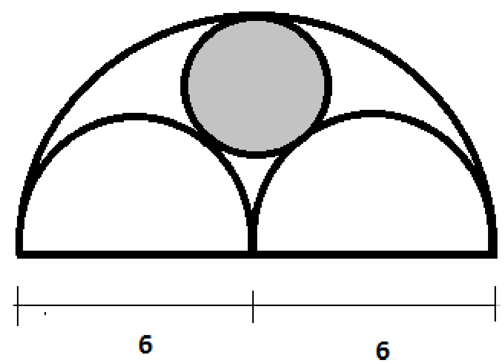
31 de enero del 2014

Primer Examen Parcial Temario AA

Tema 1: (30 puntos)
En los incisos a) y b) resuelva las ecuaciones y en c) resuelva la desigualdad

a) $2(x+1)^{-\frac{1}{3}} + 4(x+1)^{-\frac{2}{3}} = 6$ b) $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{8}{x}} = \sqrt{2x}$ c) $x > 4 - \frac{1}{x-2}$

Tema 2 (20 puntos)
Encuentre el área de la región sombreada que se muestra.

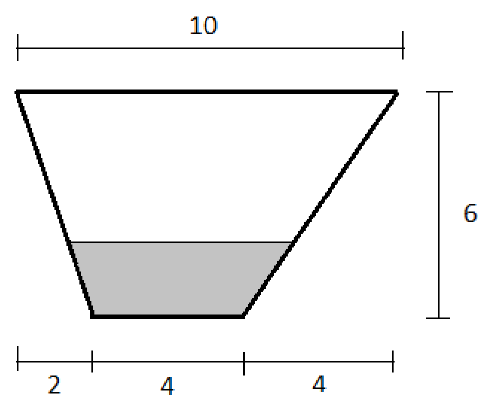


Tema 3 (20 puntos)
La quinta parte de un enjambre de abejas se posó sobre la flor de un naranjal, la tercera en la flor del romero, el triple de la diferencia entre estos dos números voló sobre una flor de lavanda y una abeja quedó sola en el aire atraída por el perfume de un jazmín. ¿Cuántas abejas tenía el enjambre?

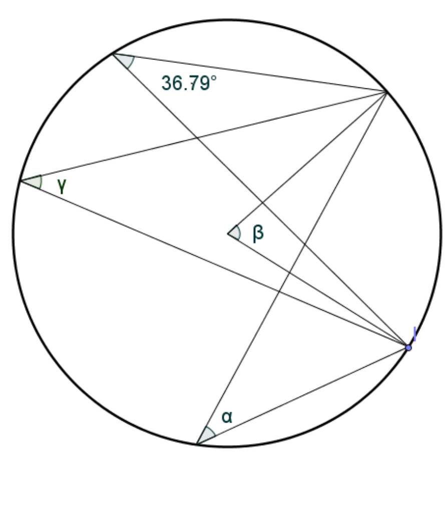
Tema 4 (20 puntos)

Una piscina tiene 12 metros de largo, 10 metros en la parte superior, 4 metros en la parte baja y 6 metros de altura. Inicialmente se encuentra vacía y en ese momento fluye agua hacia su interior.

Halle la altura para un volumen de agua de 49.5 m^3.



Tema 5 (10 puntos)
¿Cuánto miden los ángulos α, β y γ en la figura que se muestra?



SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1

Resuelva las ecuaciones:

$\boldsymbol{a)}\ \mathbf{2(x+1)^{-\frac{1}{3}}+4(x+1)^{-\frac{2}{3}}=6}$

Se define la variable $U=(x+1)^{-1/3}$ y por consiguiente $U^2=(x+1)^{-2/3}$

$$2U+4U=6$$

$$2U+4U-6=0$$

$$(U-1)(U+3/2)=0$$

$$U=1 \qquad\qquad U=-3/2$$

Se igualan los valores obtenidos con la variable definida anteriormente:

$$1=(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$
$$1=\frac{1}{(x+1)^3}$$
$$(x+1)^3=1$$
$$(x+1)=1^{1/3}$$
$$(x+1)=1$$
$$x=1-1$$

$$x=0$$

$$-3/2=(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$
$$-3/2=\frac{1}{(x+1)^3}$$
$$(x+1)^3=-2/3$$
$$(x+1)=(-2/3)^{1/3}$$
$$x=(-2/3)^{1/3}-1$$

$$x=-1.87358$$

Se comprueban los valores de x obtenidos

$$2(x+1)^{-\frac{1}{3}}+4(x+1)^{-\frac{2}{3}}=6$$
$$x=0$$

$$2(0+1)^{-1/3}+4(0+1)^{-2/3}=6$$
$$2(1)^{-1/3}+4(1)^{-2/3}=6$$
$$2(1)+4(1)=6$$
$$2+4=6$$
$$6=6$$

$$2(x+1)^{-1/3}+4(x+1)^{-2/3}=6$$
$$x=-1.87358$$

$$2(-1.87358+1)^{-\frac{1}{3}}+4(-1.87358+1)^{-\frac{2}{3}}=6$$
$$2(-0.87358)^{-1/3}+4(-0.87358)^{-2/3}=6$$
$$2(-1.046082)+4(-1.09429)=6$$
$$-2.09216-4.37715=6$$
$$-6.4693\neq 6$$

R// $x=0$

$\boldsymbol{b})\quad \sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{\frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{x}}} = \sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}$

Primero se eliminan los números con radicales de la siguiente forma:

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{8}{x}} = \sqrt{2x}\right) * \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{8}{2x}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{2 * 4}{2x}} = \frac{\sqrt{2} * \sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

$$1 + \sqrt{\frac{4}{x}} = \sqrt{x}$$

$$1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

Se define la variable $\quad U = \sqrt{x}$

$$1 + \frac{2}{U} = U$$

$$\frac{2}{U} = U - 1$$

$$2 = U(U - 1)$$

$$U^2 - U - 2 = 0$$

$$(U - 2)(U + 1) = 0$$

$$U = 2 \qquad\qquad U = -1$$

Se igualan los valores obtenidos con la variable definida anteriormente:

$$2 = \sqrt{x} \qquad\qquad -1 = \sqrt{x}$$
$$x = 2^2 \qquad\qquad x = (-1)^2$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = 1$$

Se comprueban los valores de x obtenidos

$$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{8}{x}}=\sqrt{2x}$$
$$x=4$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{8}{x}}=\sqrt{2x}$$
$$x=1$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2*4}$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$$
$$2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{8}{1}}=\sqrt{2*1}$$
$$\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\sqrt{2}$$
$$3\sqrt{2}\neq\sqrt{2}$$

R// $x=4$

$\boldsymbol{c)}$ $\quad \boldsymbol{x > 4-\frac{1}{x-2}}$

Se desarrolla el lado derecho de la desigualdad:

$$x>\frac{4(x-2)-1}{(x-2)}$$

$$x>\frac{4x-8-1}{(x-2)}$$

Se traslada el lado derecho de la desigualdad a restar del otro lado:

$$x-\frac{4x-9}{(x-2)}>0$$

$$\frac{x(x-2)-(4x-9)}{(x-2)}>0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{(x-2)}>0$$

$$\frac{(x-3)(x-3)}{(x-2)}>0$$

Se determinan los valores críticos:

$$x=3 \qquad\qquad x=2$$

Se construye una tabla con los intervalos incluyendo valores críticos y evaluando las ecuaciones.

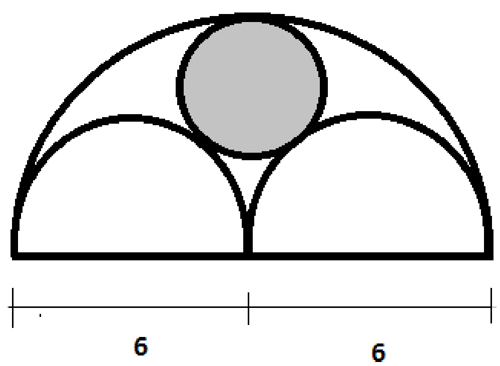
	$(-\infty, 2)$	$(2{,}3)$	$(3, \infty+)$
$(x-3)$	-	-	+
$(x-3)$	-	-	+
$(x-2)$	-	+	+
Resultado	-	+	+

Los intervalos se definen:

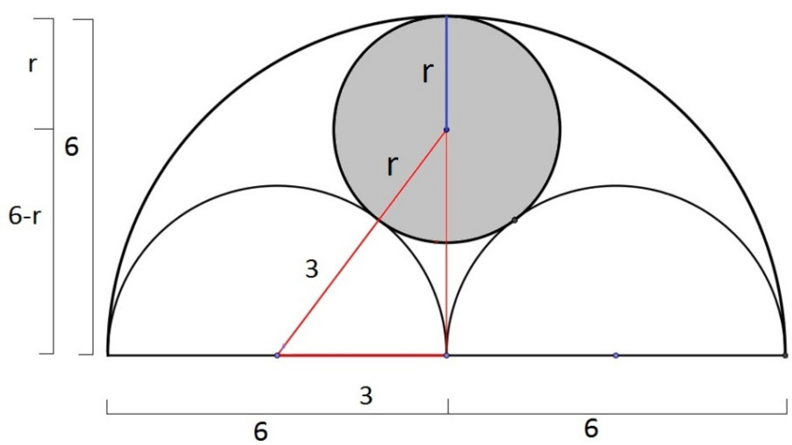
$$\text{R//}\ (2{,}3)\ U\ (3, \infty+)$$

Tema 2

Encuentre el área de la región sombreada que se muestra.



Para resolver este problema lo primero que se debe de hacer es encontrar una relación con los radios de todas las semicircunferencias y el radio de la circunferencia sombreada. Para eso es necesario triangular dentro de la figura.



Se utiliza el teorema de Pitágoras como sigue:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(3 + r)^2 = (3)^2 + (6 - r)^2$$

$$r^2 + 6r + 9 = 9 + r^2 - 12r + 36$$

$$18r = 36$$

$$r = 2$$

Teniendo el radio es posible determinar el área sombreada del círculo:

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi(2)^2$$

$$\underline{A = 4\pi}$$

Tema 3 (20 puntos)
La quinta parte de un enjambre de abejas se posó sobre la flor de un naranjal, la tercera en la flor del romero, el triple de la diferencia entre estos dos números voló sobre una flor de lavanda y una abeja quedó sola en el aire atraída por el perfume de un jazmín. ¿Cuántas abejas tenía el enjambre?

Para resolver el problema de aplicación es necesario establecer nuestra variable x:

$$x = número\ de\ abejas\ en\ el\ panal$$

Expresamos cada una de las condiciones en función del número total de abejas en el panal:

La quinta parte de un enjambre sobre el naranjal	$\frac{x}{5}$
La tercera parte en la flor del romero	$\frac{x}{3}$
El triple de la diferencia entre los anteriores	$3 * \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right)$
Una abeja quedó sola en el aire	1

Debido a que habla de fracciones del panal, se puede plantear una igualdad de cada una de estas en función del número total de abejas en el panal de la siguiente forma:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3 * \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) + 1 = x$$

$$1 = x - \frac{x}{5} - \frac{x}{3} - 3 * \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right)$$

$$1 = x - \frac{x}{5} - \frac{x}{3} - \frac{2x}{5}$$

$$1 = \frac{1}{15}x$$

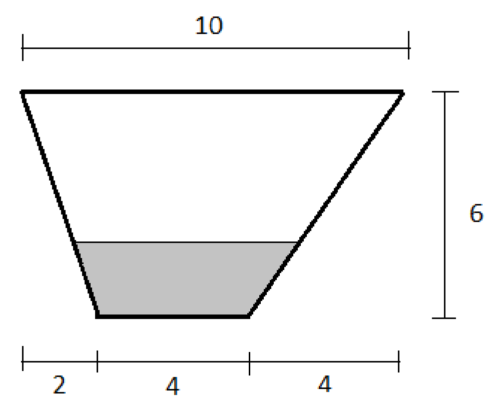
$$x = 15$$

R// El enjambre tiene 15 abejas

Tema 4 (20 puntos)

Una piscina tiene 12 metros de largo, 10 metros en la parte superior, 4 metros en la parte baja y 6 metros de altura. Inicialmente se encuentra vacía y en ese momento fluye agua hacia su interior.

Halle la altura para un volumen de agua de 49.5 m^3.

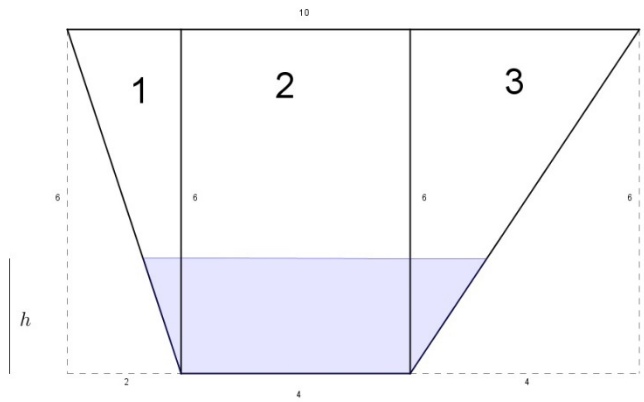


La resolución del problema inicia relacionando los datos que tenemos, tales como el volumen, largo de la piscina y lados del trapecio para el área:

$$Volumen = area * largo$$

$$V = A * l$$

Para determinar el área, debido a que los lados no son iguales, es necesario realizar una división del trapecio en un rectángulo y dos triángulos rectángulos:



Teniendo las medidas, se determina que el área total es la suma de cada área.

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Conociendo la fórmula del área del triángulo rectángulo y el rectángulo, se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}b_1 h + b_2 h + \frac{1}{2}b_3 h$$

Obtenemos la ecuación del área total en función de la altura necesaria conociendo b_1, b_2, b_3 .

$$A = \frac{1}{2}(2)h + (4)h + \frac{1}{2}(4)h$$

$$A = 7h$$

Ahora se puede relacionar la ecuación del volumen definida anteriormente para determinar la altura necesaria.

$$V = A * l$$

$$V = (7h) * l$$

$$h = \frac{V}{7 * l}$$

Conocemos el volumen necesario y el largo de la piscina.

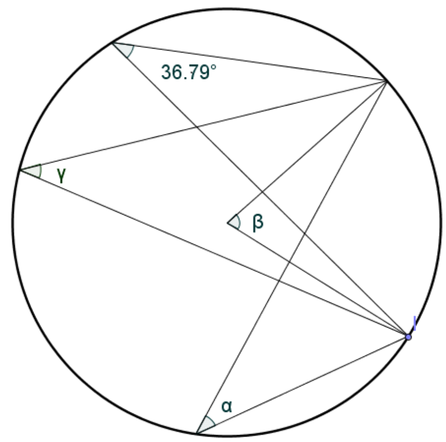
$$h = \frac{49.5\ m^3}{(7 * 12)\ m^2}$$

$$h = 0.5893\ m$$

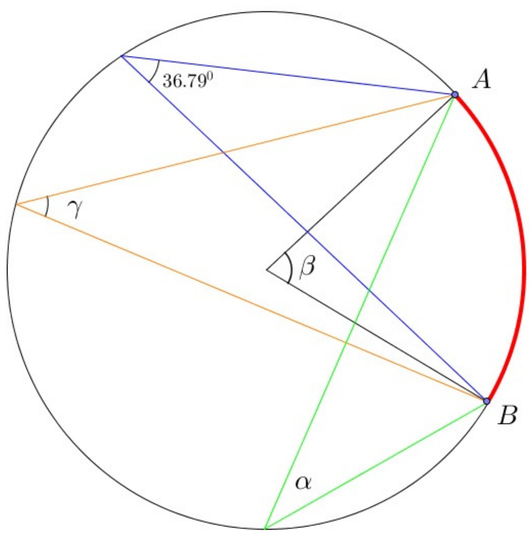
R// La altura del agua en la piscina es de 0.5893 m.

Tema 5 (10 puntos)

¿Cuánto miden los ángulos α, β y γ en la figura que se muestra?



La obtención de los ángulos se determina mediante un principio básico sobre ángulos en una circunferencia, el cual dice que un arco de circunferencia también puede ser medido en grados.



Esto se puede relacionar según la siguiente formula:

$$\theta = \frac{1}{2}AB$$

En donde AB es la longitud de arco y θ es el ángulo cuyo vértice se encuentra en cualquier punto sobre la circunferencia.

Primero se determinar la longitud de arco AB a partir del ángulo dado.

$$AB = 2\theta$$

$$AB = 2(36.79°)$$

$$AB = 73.58°$$

Como se puede observar en la figura, todos los ángulos comparten el mismo arco de la circunferencia (en rojo).

El ángulo γ con las cuerdas en color naranja y el ángulo α con las cuerdas en verde se determinan con la misma fórmula descrita anteriormente.

$$\gamma = \frac{1}{2}(73.58°)$$

$$\gamma = 36.79°$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(73.58°)$$

$$\alpha = 36.79°$$

Para β con las cuerdas en negro no se utiliza la fórmula, debido a que su vértice no se encuentra en ningún punto sobre la circunferencia, sino que se encuentra en el radio. Para este caso, el ángulo es igual a la longitud del arco.

$$\beta = AB$$

$$\beta = 73.58°$$

R// La medida de los ángulos es $\gamma = 36.79°$, $\alpha = 36.79°$ y $\beta = 73.58°$