

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-1-V-1-00-2018



CURSO:	Matemática Básica 1
SEMESTRE:	Primero
CÓDIGO DEL CURSO:	101
TIPO DE EXAMEN:	Primer Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	14 de febrero de 2018
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Darwin Santos
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Darwin Santos
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

PRIMER EXAMEN PARCIAL

TEMARIO C

TEMA 1. (30 puntos)

Resuelva como corresponda en cada caso:

a) $\sqrt{2x+15} - 2 = \sqrt{6x+1}$

b) $x^2 + 9x \leq x^3 + 9$

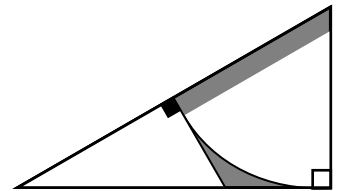
c) $x^3 - 26x^{\frac{3}{2}} - 27 = 0$

TEMA 2. (20 puntos)

La empresa “El metal Dorado” se dedica a preparar barras de metal con aleaciones de oro y plata para exportación y fabricación de joyería local. Ha entrado un pedido en el cual le solicita 150 gramos de este metal con una concentración de oro al 30%. Actualmente solo dispone de dos barras con este tipo de aleación, pero una de ellas tiene una concentración de oro al 50% y el otro al 10%. ¿Cuántos gramos de cada barra deben fundirse para despachar el pedido?

TEMA 3. (20 puntos)

En un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 24 metros y su cateto vertical mide 12 metros, se inscribe un sector circular y un triángulo rectángulo de menor tamaño. Determine el valor del área sombreada.



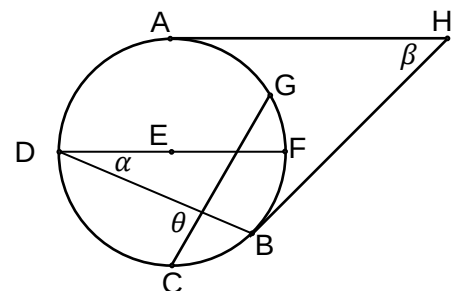
TEMA 4. (15 puntos)

Dada la figura adjunta, se sabe que: $\widehat{AGFB} = 140^\circ$, $\widehat{DC} = 90^\circ$, $\widehat{FB} = 50^\circ$ y $\widehat{GF} = 30^\circ$. Si el punto “E” es el centro del círculo, calcule:

a) El ángulo β

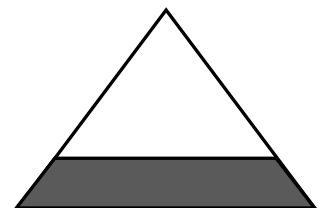
b) El ángulo α

c) El ángulo θ



TEMA 5. (15 puntos)

La figura muestra un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 20 centímetros y el tercer lado mide 24 centímetros. Si la altura del trapecio que se encuentra inscrito es de 4 centímetros, determine su área.



SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (30 puntos)

Resuelva como corresponda en cada caso:

a) $\sqrt{2x+15} - 2 = \sqrt{6x+1}$

b) $x^2 + 9x \leq x^3 + 9$

c) $x^3 - 26x^{3/2} - 27 = 0$

INCISO A

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se deberá al cuadrado de ambos lados de la ecuación y simplificar. Teniendo en consideración que $(\sqrt{a})^2 = (a^{1/2})^2 = a$	$(\sqrt{2x+15} - 2)^2 = (\sqrt{6x+1})^2$ Sabiendo que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $2x + 15 - 4\sqrt{2x+15} + 4 = 6x + 1$ $18 - 4x = 4\sqrt{2x+15}$ Se divide dentro de 2: $9 - 2x = 2\sqrt{2x+15}$
2.	Al elevar ambos lados de la ecuación al cuadrado queda de la siguiente forma:	$(9 - 2x)^2 = (2\sqrt{2x+15})^2$ $81 - 36x + 4x^2 = 4(2x + 15)$ $81 - 36x + 4x^2 = 8x + 60$ $4x^2 - 44x + 21 = 0$
	A través de la fórmula cuadrática.	$4x^2 - 44x + 21 = 0$

3.	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-(-44) \pm \sqrt{(-44)^2 - 4(4)(21)}}{2(4)}$ Queda: $x_1 = \frac{21}{2}$ $x_2 = \frac{1}{2}$
4.	Comprobar si x_1 y x_2 son solución de la ecuación.	Para $x_1 = \frac{21}{2}$: $4 \neq 8$ Para $x_2 = \frac{1}{2}$: $2 = 2$ Por lo tanto la única solución de la ecuación es : $x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{2}$		

INCISO B

NO.	EXPLICACIÓN	OPERATORIA
1.	Se debe pasar la expresión del lado izquierdo al derecho.	$x^2 + 9x \leq x^3 + 9$ $x^3 - x^2 - 9x + 9 \geq 0$

2.	Factorizando y simplificando se tiene:	$x^3 - x^2 - 9x + 9 \geq 0$ $(x^3 - x^2) - (9x - 9) \geq 0$ $x^2(x - 1) - 9(x - 1) \geq 0$ $(x^2 - 9)(x - 1) \geq 0$ $(x - 3)(x + 3)(x - 1) \geq 0$																														
3.	Determinar los puntos críticos igualando a cero la desigualdad.	$(x - 3)(x + 3)(x - 1) = 0$ Para $(x - 3) = 0$ $x = 3$ Para $(x + 3) = 0$ $x = -3$ Para $(x - 1) = 0$ $x = 1$																														
4.	Elaborar tabla de signos en donde K será el valor de prueba.	<table><tr><th>Intervalos</th><th>$(-\infty, -3)$</th><th>$(-3, 1)$</th><th>$(1, 3)$</th><th>$(3, \infty)$</th></tr><tr><td>K</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>$(x + 1)$</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$(x - 3)$</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>$(x + 3)$</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$(x - 3)(x + 3)(x - 1)$</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	Intervalos	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$	K	-4	-2	0	4	$(x + 1)$	-	-	+	+	$(x - 3)$	-	-	-	+	$(x + 3)$	-	+	+	+	$(x - 3)(x + 3)(x - 1)$	-	+	-	+
Intervalos	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$																												
K	-4	-2	0	4																												
$(x + 1)$	-	-	+	+																												
$(x - 3)$	-	-	-	+																												
$(x + 3)$	-	+	+	+																												
$(x - 3)(x + 3)(x - 1)$	-	+	-	+																												
5.	Las posibles soluciones se encuentran en los intervalos:	$x_{\epsilon}: [-3, 1] \cup [3, +\infty)$																														

R./

$$x_{\in} : [-3, 1] \cup [3, +\infty)$$

INCISO C

NO.	EXPLICACIÓN	OPERATORIA
1.	Ordenar los exponentes de la variable x de tal modo que se pueda realizar una sustitución.	$x^{6/2} - 26x^{3/2} + 27 = 0$
2.	Realizar sustitución $u = x^{3/2}$	$(x^{3/2})^2 - 26x^{3/2} + 27 = 0$ $(u)^2 - 26u + 27 = 0$
3.	Resolver ecuación cuadrática con la sustitución propuesta.	$u_1 = 27$ $u_2 = -1$
4.	Regresando a la variable original por medio de la sustitución realizada.	Para $u_1 = 27$: $27 = x^{3/2}$ $x = 27^{2/3}$ $x = 9$ Para $u_1 = -1$: $-1 = x^{3/2}$ $x = (-1)^{2/3}$ $x = 1$

5.	Al realizar la comprobación respectiva para determinar si ambas son solución de la ecuación, se llega a la siguiente conclusión:	La única solución válida de la ecuación es: $x = 9$
----	--	--

R./	$x = 9$
-----	---------

Tema 2: (20 puntos)

La empresa “El metal Dorado” se dedica a preparar barra de metal con aleaciones de oro y plata para exportación y fabricación de joyería local. Ha entrado un pedido en el cual le solicita 150 gramos de este metal con una concentración de oro al 30%. Actualmente solo dispone de dos barras con este tipo de aleación, pero una de ellas tiene una concentración de oro al 50% y el otro al 10%. ¿Cuántos gramos de cada barra deben fundirse para despachar el pedido?

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Plantear un esquema que describa el problema.	Plata: 70% oro: 30% Se sabe que se necesita 150 gramos de las cuales: $Masa_{plata} = 0.7 * 150gr. = 105 gr.$ $Masa_{oro} = 0.3 * 150gr. = 45 gr.$

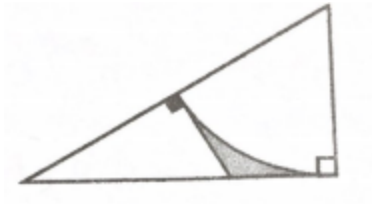
		Pero solo se posee dos barras en las que: 1. Plata: 50% y oro: 50% 2. Plata: 90% y oro: 10% Por lo tanto se plantea una ecuación en la cual se pueda determinar cuántos gramos de oro se necesita de cada una de las barras disponibles para obtener una concentración del 30%.
2.	Planteando ecuación. Recordar que $\%Concentración * Masa (gramos)$	Si $x = \text{gramos de oro de barra 1}$, entonces $150 - x = \text{gramos de oro de barra 2}$ Para la barra 1: $0.5 x$ Para la barra 2: $0.1 (150 - x)$ Por lo tanto, la suma de la masa de oro de cada una de ellas debe ser igual a la masa solicitada, 45 gramos. $0.5x + 0.1(150 - x) = 45$
3.	Resolver ecuación planteada.	$0.5x + 0.1(150 - x) = 45$ $0.5x + 15 - 0.1x = 45$ $0.4x = 30$

		$x = \frac{30}{0.4}$ $x = \textbf{75 gramos de oro de barra 1}$ Por lo tanto: $150 - x = \textit{Gramos de oro de barra 2}$ $150 - x = \textbf{75 Gramos de oro de barra 2}$
--	--	---

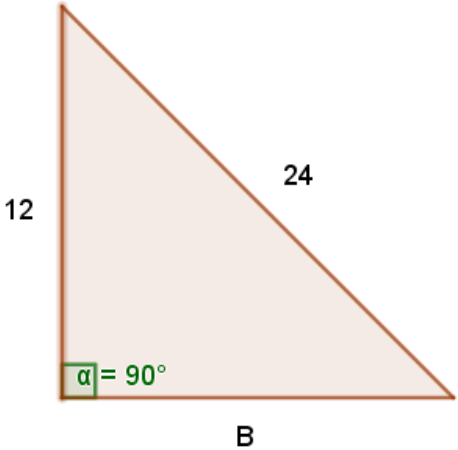
R./	Debe fundirse 75 gramos de oro de la barra al 50% y 75 gramos de la barra al 10%.
-----	--

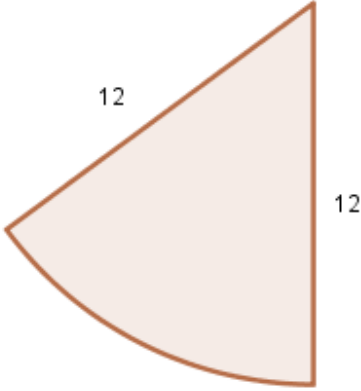
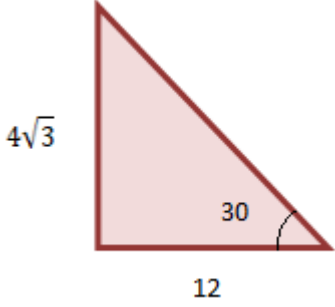
Tema 3: (30 puntos)

En un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 24 metros y su cateto vertical mide 12 metros, se inscribe un sector circular y un triángulo rectángulo de menor tamaño. Determine el valor del área sombreada.



NO.	EXPLICACIÓN	OPERATORIA
1	El área sombreada se determinada por el siguiente planteamiento:	$\begin{aligned} \textit{Área}_{\textit{Sombreada}} &= \textit{área}_{\textit{Triángulo rectángulo 1}} \\ &- \textit{área}_{\textit{sector circular}} \\ &- \textit{área}_{\textit{Triángulo rectángulo 2}} \end{aligned}$

2	Determinar área del triángulo rectángulo 1 (Triángulo mayor).	 Utilizando teorema de Pitágoras para determinar el cateto B: $12^2 + B^2 = 24^2$ $B = 12\sqrt{3}$ Por lo tanto, $\text{área}_{\text{Triángulo rectángulo 1}} = \frac{1}{2} (\text{Base})(\text{Altura})$ $\text{área}_{\text{Triángulo rectángulo 1}} = \frac{1}{2} (12\sqrt{3})(12)$ $\text{área}_{\text{Triángulo rectángulo 1}} = 72\sqrt{3}$
---	---	---

3	Determinar el área del sector circular.	 $\text{área}_{\text{sector circular}} = \frac{1}{2}(\text{Ángulo})r^2$ Donde: • Ángulo = $\frac{\pi}{3}$ • $r = 12$ $\text{área}_{\text{sector circular}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)(12)^2$ $\text{área}_{\text{sector circular}} = 24\pi$
4	Determinar el área del triángulo rectángulo 2.	 El lado de $4\sqrt{3}$ se obtuvo por medio de la tangente :

		$\tan(30) = \frac{12}{l}$ $l = \frac{12}{\tan(30)} = 4\sqrt{3}$ Por lo tanto, $\text{área}_{\text{Triángulo rectángulo 2}} = \frac{1}{2} (12)(4\sqrt{3})$ $\text{área}_{\text{Triángulo rectángulo 2}} = 24\sqrt{3}$
5	Sustituyendo datos en la ecuación.	$\text{Área}_{\text{sombreada}} = 72\sqrt{3} - 24\pi - 24\sqrt{3}$ $\text{Área}_{\text{sombreada}} = 7.83 u^2$

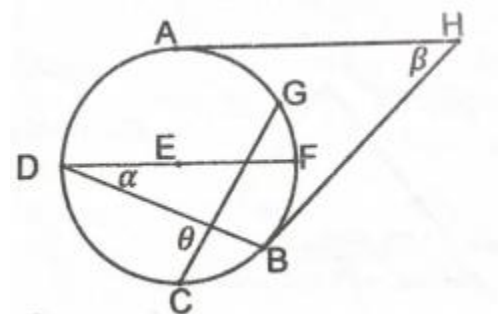
R. /

El área sombreada es $7.83 u^2$.

Tema 4: (15 puntos)

Dada la figura adjunta, se sabe que: $\widehat{AGFB} = 140^\circ$, $\widehat{DC} = 90^\circ$, $\widehat{FB} = 50^\circ$ y $\widehat{GF} = 30^\circ$. Si el punto "E" es el centro del círculo, calcule:

- a) El ángulo β
- b) El ángulo α
- c) El ángulo θ

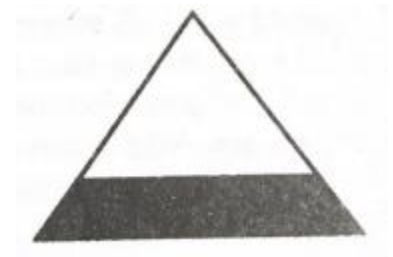


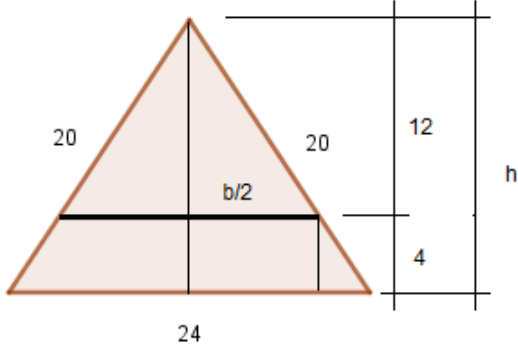
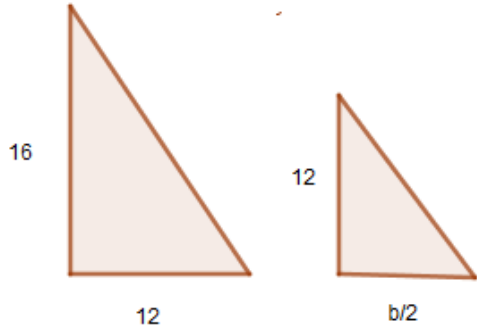
NO.	EXPLICACIÓN	OPERACIÓN
2	Identificar el ángulo β , α y θ utilizando las propiedades de medida de arcos y ángulos en la circunferencia siguientes:	$\alpha = \frac{\widehat{FB}}{2}$ $\theta = \frac{\widehat{DC} + \widehat{BFG}}{2}$ $\beta = \frac{\widehat{ADCB} - \widehat{AFGB}}{2}$
3	Hallar β es necesario conocer las medidas de $\widehat{ADCB}$.	Como $\widehat{AFGB} = 140^\circ$, entonces: $\widehat{ADCB} = 360^\circ - \widehat{AFGB}$ $\widehat{ADCB} = 360^\circ - 140^\circ$ $\widehat{ADCB} = 220^\circ$ Por lo tanto: $\beta = \frac{\widehat{ADCB} - \widehat{AFGB}}{2}$ $\beta = \frac{220^\circ - 140^\circ}{2}$ $\beta = 40^\circ$
4	Determinar el ángulo α .	Como $\widehat{FB} = 50^\circ$, entonces: $\alpha = \frac{\widehat{FB}}{2}$ $\alpha = \frac{50}{2}$ $\alpha = 25^\circ$

5	Hallar el ángulo θ .	Se calcula $\widehat{BFG}$ para determinar θ : $\widehat{BFG} = \widehat{GF} + \widehat{FB}$ $\widehat{BFG} = 30 + 50$ $\widehat{BFG} = 80^\circ$ Y como $\widehat{DC} = 90^\circ$, entonces $\theta = \frac{\widehat{DC} + \widehat{BFG}}{2}$ $\theta = \frac{90 + 80}{2}$ $\theta = 85^\circ$
R./ $\beta = 40^\circ, \alpha = 25^\circ, \theta = 85^\circ$		

Tema 5: (15 puntos)

La figura muestra un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 20 centímetros y el tercer lado mide 24 centímetros. Si la altura del trapecio que se encuentra inscrito es de 4 centímetros, determine su área.



No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Realizar esquema del problema.	
2	Calcular la altura del triángulo mayor (h)	$h^2 + 12^2 = 20^2$ $h = \sqrt{20^2 - 12^2}$ $h = 16$
3	Aplicar semejanza de triángulos para encontrar la base menor (b) del trapecio que se encuentra inscrito en el triángulo isósceles.	 $\frac{b/2}{12} = \frac{12}{16}$ $\frac{b}{24} = \frac{12}{16}$ $b = \frac{12 * 24}{16}$ $b = 18$
4		

	Se encontrará el área del trapezio.	$\text{Área}_{\text{Trapezio}} = \left(\frac{\text{Base mayor} + \text{Base menor}}{2} \right) * \text{Altura}$ Donde: • Base mayor = 24 • Base menor = 18 • Altura = 4 Por lo tanto, $\text{Área}_{\text{Trapezio}} = \left(\frac{24 + 18}{2} \right) * 4$ $\text{Área}_{\text{Trapezio}} = 84 \text{ cm}^2$
--	-------------------------------------	---

R. /

$$\text{Área}_{\text{Trapezio}} = 84 \text{ cm}^2$$