

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-1-M-1-06-2016_07



CURSO:	Matemática Básica 1
SEMESTRE:	Primero, curso de vacaciones
CÓDIGO DEL CURSO:	101
TIPO DE EXAMEN:	Primer Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	08 de Junio de 2016
RESOLVIO Y DIGITALIZO EL EXAMEN:	KEVIN JAVIER CHIN ORTIZ
REVISÓ EL EXAMEN:	Ing. Alejandro Estrada
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

PRIMER EXAMEN PARCIAL
TEMARIO A1

Tema 1 (30 puntos)

Resuelva como corresponda en cada caso:

a) $3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12x^{1/6} + 4$

b) $\frac{7}{3x+15} - 1 \leq \frac{4}{3x-12}$

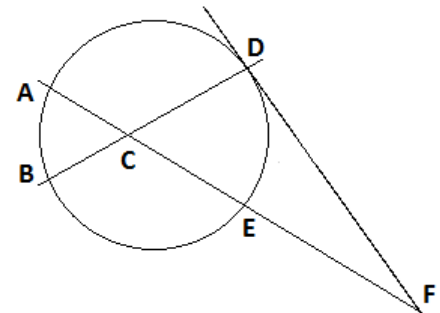
Tema 2 (15 puntos)

Un farmacéutico debe elaborar 30 mililitros de gotas especiales para los ojos para un paciente con glaucoma. La solución de gotas para los ojos debe tener un ingrediente activo al 4%, pero el farmacéutico sólo tiene al 10% y solución al 1% en existencia. ¿Cuánto de cada tipo de solución debe usarse para surtir la receta?

Tema 3 (20 puntos)

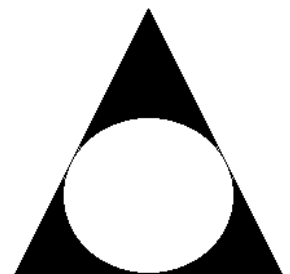
En la figura adjunta, la recta $\overleftrightarrow{DF}$ es tangente al círculo. Si se sabe que: $\widehat{DE} = 70^\circ$; $\angle DCE = 60^\circ$ y $\widehat{BE} = 120^\circ$, calcule:

- a) El valor del arco $\widehat{AB}$.
- b) El valor del ángulo $\angle CDF$.
- c) El valor de ángulo $\angle DFE$.



Tema 4 (20 puntos)

Una esfera se inscribe en un cono recto circular cuyo diámetro mide 48 centímetros y su altura 32 centímetros (la figura adjunta muestra una sección transversal). Determine el valor del volumen del sólido que queda dentro del cono pero fuera de la esfera.



Tema 5 (20 puntos)

Un depósito de 8 pies de longitud, tiene una sección trasversal con la forma de trapecio recto invertido, en el fondo del depósito la base mide 3 pies, en la parte superior mide 6 pies, si la altura es de 4 pies, determine:

- a) La capacidad del depósito.
- b) La altura del nivel de agua cuando el volumen es de 99 pies cúbicos.
- c) La altura del nivel de agua cuando el área de espejo de agua es de 30 pies cúbicos.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 30 puntos

a) $3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12x^{1/6} + 4$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para una mejor visualización quitaremos los radicales y trabajaremos con exponentes fraccionarios.	$3x^{1/2} + x^{1/3} - 12x^{1/6} - 4 = 0$
2.	Trabajaremos con el mismo exponente, en este caso el de menor valor.	$3(x^{1/6})^3 + (x^{1/6})^2 - 12x^{1/6} - 4 = 0$
3.	Hacemos la siguiente sustitución en nuestra ecuación: Si $w = x^{1/6}$	$3(w)^3 + (w)^2 - 12w - 4 = 0$
4.	Aplicamos un caso de factorización, agrupación de términos y simplificamos.	$(3w^3 + w^2) + (-12w - 4) = 0$ $w^2(3w + 1) - 4(3w + 1) = 0$ $(3w + 1)(w^2 - 4) = 0$ $(3w + 1)(w - 2)(w + 2) = 0$ $w_1 = -1/3$ $w_2 = 2$ $w_3 = -2$
5.	Para hallar las posibles soluciones a nuestra ecuación de origen, regresamos los valores de "w" a términos de "x" con la sustitución hecha en el paso 3.	Para w_1 : $x^{1/6} = -1/3$ $x_1 = (-1/3)^6 = \frac{1}{729}$ Para w_2 : $x^{1/6} = 2$ $x_2 = x = (2)^6 = 64$ Para w_3 : $x^{1/6} = -2$ $x_3 = x = (-2)^6 = 64$
6.		Para x_1 :

	Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación de origen.	$3\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{3}} - 12\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{6}} - 4 = -\frac{70}{9}$ "No Cumple" Para x_2 y x_3: $3(64)^{\frac{1}{2}} + (64)^{\frac{1}{3}} - 12(64)^{\frac{1}{6}} - 4 = 0$ "Si cumple"
--	---	--

R. $x = 64$

b) $\frac{7}{3x+15} - 1 \leq \frac{4}{3x-12}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Colocaremos todas las expresiones de un solo lado de la igualdad, factorizando los denominadores.	$\frac{7}{3(x+5)} - \frac{1}{1} - \frac{4}{3(x-4)} \leq 0$
2.	Sacando el M.C.M procedemos a realizar la operación entre fracciones y simplificar hasta encontrar los valores críticos.	$\frac{7(x-4) - 3(x+5)(x-4) - 4(x+5)}{3(x+5)(x-4)} \leq 0$ $\frac{7x - 28 - 3(x^2 + x - 20) - 4x - 20}{3(x+5)(x-4)} \leq 0$ $\frac{3x - 48 - 3x^2 - 3x + 60}{3(x+5)(x-4)} \leq 0$ $\frac{12 - 3x^2}{3(x+5)(x-4)} \leq 0$ $\frac{\cancel{3}(4 - x^2)}{\cancel{3}(x+5)(x-4)} \leq 0$
3.	Factorizamos el numerador con una diferencia de cuadrados y así encontraremos los factores de la desigualdad y por lo tanto los puntos críticos.	$\frac{(2-x)(2+x)}{(x+5)(x-4)} \leq 0$ Valores críticos: $x = -5, x = -2, x = 2, x = 4$

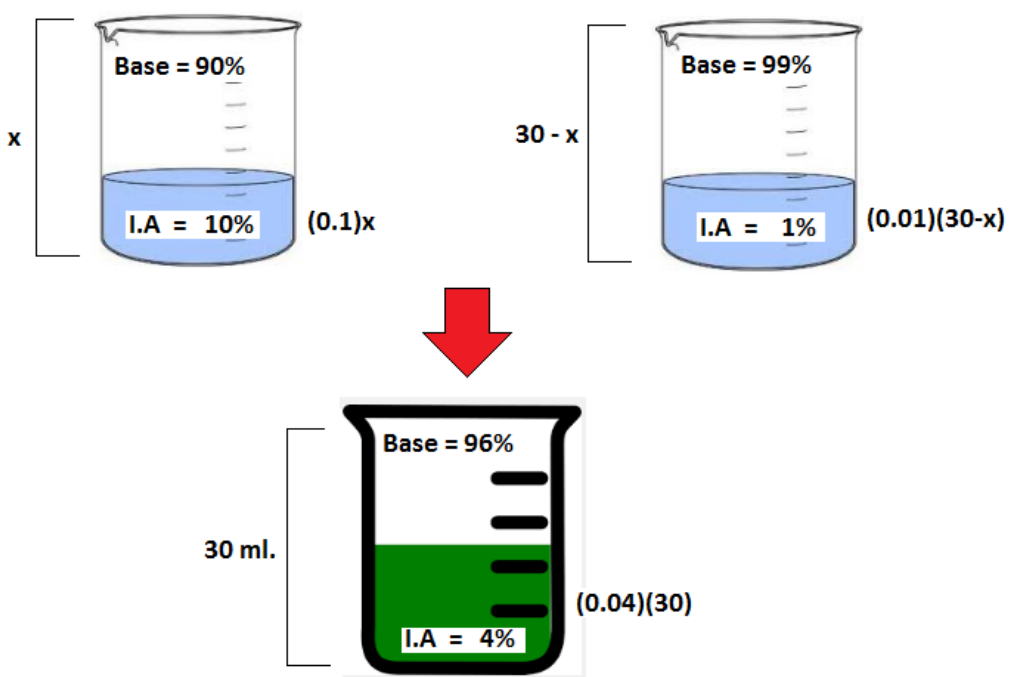
4.	Conociendo ya los valores críticos, podemos armar nuestros intervalos y con ello nuestra tabla de signos resultantes.	<table><tr><td>Intervalo</td><td>$(-\infty, -5)$</td><td>$(-5, -2)$</td><td>$(-2, 2)$</td><td>$(2, 4)$</td><td>$(4, \infty)$</td></tr><tr><td>x</td><td>-6</td><td>-3</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>$(2 - x)$</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>$(2 + x)$</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$(x + 5)$</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$(x - 4)$</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>Signo</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	Intervalo	$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$	x	-6	-3	0	3	5	$(2 - x)$	+	+	+	-	-	$(2 + x)$	-	-	+	+	+	$(x + 5)$	-	+	+	+	+	$(x - 4)$	-	-	-	-	+	Signo	-	+	-	+	-
Intervalo	$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$																																							
x	-6	-3	0	3	5																																							
$(2 - x)$	+	+	+	-	-																																							
$(2 + x)$	-	-	+	+	+																																							
$(x + 5)$	-	+	+	+	+																																							
$(x - 4)$	-	-	-	-	+																																							
Signo	-	+	-	+	-																																							
5.	Teniendo en cuenta que es se trata de una desigualdad menor o igual que, utilizamos los intervalos con signo negativo y verificamos si serán con intervalo abierto o cerrado.	$(-\infty, -5) \cup [-2, 2] \cup (4, \infty)$																																										

R./

$$X \in (-\infty, -5) \cup [-2, 2] \cup (4, \infty)$$

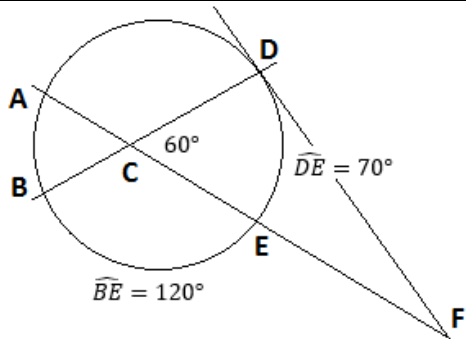
Tema 2: 15 puntos

No.	Explicación	Operatoria
1.	Realizaremos un esquema para comprender mejor lo que sucede en el problema y así saber el porcentaje de cada tipo de solución que debe utilizarse.	I.A = Ingrediente Activo

2.		
3.	A partir del esquema realizado, utilizamos la cantidad "X" que existe en cada recipiente y la cantidad de ingrediente activo contenido en el mismo para plantear nuestra ecuación.	$0.1x + 0.01(30 - x) = (0.04)(30)$
4.	Resolviendo la ecuación:	$ \begin{aligned} 0.1x + 0.01(30 - x) &= 1.2 \\ 0.1x + 0.3 - 0.01x &= 1.2 \\ 0.09x &= 0.9 \\ x &= \frac{0.9}{0.09} \\ x &= 10 \end{aligned} $
5.	Ahora ya conociendo la cantidad de solución al 10% podemos encontrar la cantidad de solución al 1%	$ \begin{aligned} 30 - x \\ 30 - 10 &= 20 \end{aligned} $
R./ Se debe agregar 10 ml. De solución al 10% y 20 ml. De solución al 1%		

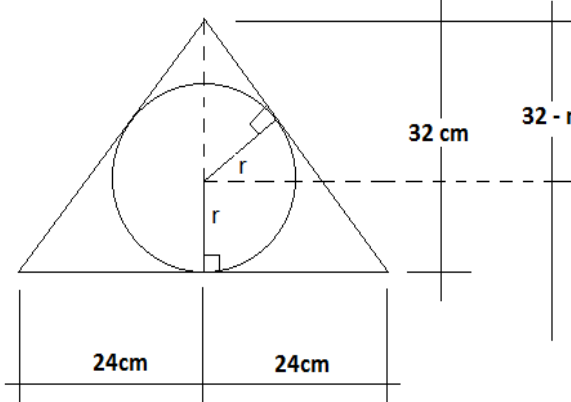
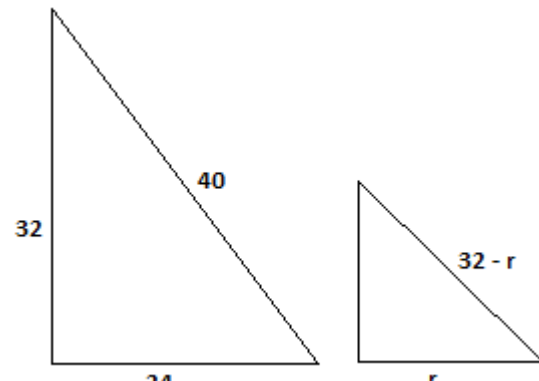
Tema 3: 15 puntos

a) El valor del arco $\widehat{AB}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero localizaremos en la figura los datos iniciales que nos da el problema.	
2.	Aplicando el principio de ángulos internos, si sabemos que $\angle DCE = 60^\circ$, entonces: $\angle ACB = 60^\circ$, por lo tanto utilizamos la siguiente ecuación: $\theta = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{DE})$	Sustituyendo valores conocidos: $60 = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + 70)$ Despejando $\widehat{AB}$: $\widehat{AB} + 70 = 120$ $\widehat{AB} = 120 - 70$ $\widehat{AB} = 50^\circ$
b) El valor del ángulo $\angle CDF$		
3.	Sabiendo el valor de $\widehat{BE}$ y de $\widehat{DE}$ podemos utilizar la siguiente ecuación: $\angle CDF = \frac{\widehat{BE} + \widehat{DE}}{2}$	$\angle CDF = \frac{\widehat{BE} + \widehat{DE}}{2}$ $\angle CDF = \frac{120 + 70}{2}$ $\angle CDF = 95^\circ$
c) El valor del ángulo $\angle DFE$		
4.	Sabiendo que la sumatoria de los ángulos de un triángulo es de 180° , notamos que se forma un	$\angle DFE = 180 - 95 - 60$

	triángulo entre DCF del cual conocemos dos ángulos $\angle CDF = 95^\circ$ y $\angle DCE = 60^\circ$	$\angle DFE = 25^\circ$
$\widehat{AB} = 50^\circ \quad \angle CDF = 95^\circ \quad \angle DFE = 25^\circ$		

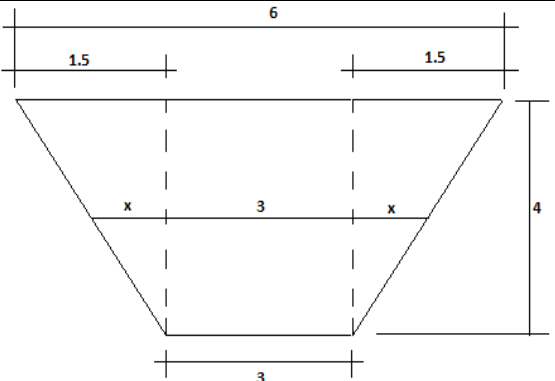
Tema 4: 20 puntos.

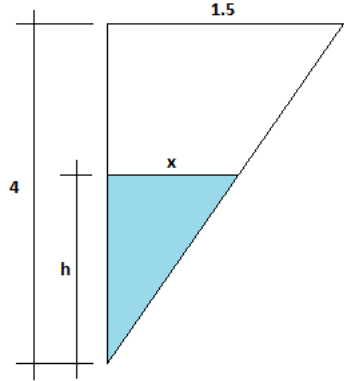
No.	Explicación	Operación
1	Primero localizaremos en la gráfica los datos iniciales que nos da el problema	
2	Para encontrar el volumen dentro del cono y fuera de la esfera utilizaremos la siguiente fórmula:	$V = V_{cono} - V_{esfera}$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{4}{3}\pi r^3$
3	Como se puede notar la única incógnita en la ecuación es el radio de la esfera, por lo tanto aplicaremos triángulos semejantes entre el triángulo rectángulo del cono y el triángulo rectángulo que se forma desde el centro de la esfera hasta el punto de tangencia con el cono	
4	Aplicando el teorema de triángulos semejantes y despejando el radio de la esfera:	$\frac{32 - r}{r} = \frac{40}{24}$ $32 - r = \frac{5}{3}r$ $r + \frac{5}{3}r = 32$

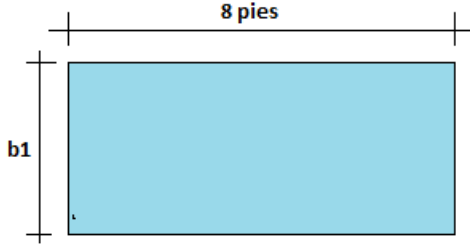
		$\frac{8}{3}r = 32$ $r = \frac{(32)(3)}{8} = 12 \text{ cm}$
5	Sustituyendo en la ecuación y hallando el volumen indicado:	$V = \frac{1}{3}\pi(24)^2(32) - \frac{4}{3}\pi(12)^3$ $V = 3840\pi = 12063.716 \text{ cm}^3$

R./ El volumen del sólido que queda dentro de cono y fuera de la esfera es de :
12063.716 cm³

Tema 5: 20 puntos

No.	Explicación	Operación
1	Para iniciar el problema haremos un esquema representando todos los valores iniciales e incógnitas	
a) Capacidad del depósito:		
2	Para determinar la capacidad del depósito utilizamos la siguiente ecuación de volumen:	$V = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)(h)(longitud)$ $V = \left(\frac{3 + 6}{2}\right)(4)(8)$ $V = 144 \text{ p}^3$
b) La altura del nivel de agua cuando el volumen es de 99 pies cúbicos:		
3	Para este inciso la altura del nivel de agua es variable, ya que según el tanque tanga un mayor o menor volumen la altura subirá o bajará.	$99 = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)(h)(longitud)$

4	Por lo tanto, nuestra incógnita en la ecuación será la base b_1 (base superior del trapecio), ya que no permanecerá constante, para ello analizamos el triángulo rectángulo que se forma en uno de los extremos del trapecio	
5	Aplicando el teorema de triángulos semejantes:	$\frac{1.5}{x} = \frac{4}{h}$ $x = \frac{3}{8}h$
6	Reescribiendo el nuevo valor de b_1 en función de "h"	Si $b_1 = 3 + 2x$ $b_1 = 3 + 2\left(\frac{3}{8}h\right)$ $b_1 = 3 + \frac{3}{4}h$
7	Ahora sustituimos el nuevo valor de "h" encontrado en la ecuación del paso No. 3 y despejamos el valor de "h"	$99 = \left(\frac{\left(3 + \frac{3}{4}h\right) + 3}{2}\right)(h)(8)$ $99 = \left(\frac{6 + \frac{3}{4}h}{2}\right)(h)(8)$ $99 = \left(\frac{3}{8}h + 3\right)(h)(8)$ $99 = (3h + 24)(h)$ $99 = 3h^2 + 24h$ $3h^2 + 24h - 99 = 0$
8	Resolviendo la ecuación cuadrática y hallando el valor de "h" por la ecuación de bieta o formula cuadrática:	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(24) \pm \sqrt{(24)^2 - 4(3)(99)}}{2(3)}$ $h = \frac{-24 \pm 42}{6}$
9	Por lo tanto el nivel de agua "h", cuando el volumen es de 99 pies cúbicos es:	$h = 3 \text{ pies}$

c) La altura del nivel de agua cuando el área del espejo de agua es de 30 pies cúbicos:		
10	Sabiendo que la forma del espejo de agua es:	
11	Por lo tanto utilizamos la fórmula del área del rectángulo y sustituimos el valor de b_1 , encontrado en el paso No. 6	$A = 8(b_1)$ $30 = (8)(3 + \frac{3}{4}h)$ $30 = 24 + 6h$ $6 = 6h$
12	Por lo tanto la altura del nivel de agua cuando el área del espejo de agua es de 30 pies cúbicos es:	$h = 1 \text{ pie}$