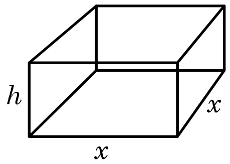
PROBLEMA RESUELTO 6

Se quiere construir una caja rectangular abierta de base cuadrada. La caja debe tener una capacidad de 384 cm^3 y será construida de un material para la base que cuesta Q3 el centímetro cuadrado y el material para los lados tiene un costo de Q2 el centímetro cuadrado. Determine las dimensiones de la caja si se dispone de Q576 para su construcción.

Solución

Sea x la longitud de la base y h la altura de la caja, como se muestra en la figura siguiente



Como el volumen es igual al área de la base por la altura, se tiene

$$V = \left(x^2\right)h$$

Despejando h en términos de x

$$h = \frac{V}{x^2} = \frac{384}{x^2}$$

El costo de los materiales depende del área superficial de la caja. El área de la base es

$$A.B. = x^2$$

Note que solo se toma una de las bases pues la caja es abierta.

Como las cuatro caras laterales son iguales, el área lateral es

$$A.L. = 4\left(xh\right)$$

El costo de la base se encuentra multiplicando el precio Q3 del material por el área de la base, mientras que el costo de los lados se encuentra multiplicando Q2 por el área lateral. El costo total es

$$\text{Costo total} = \text{Costo de la base} + \text{Costo de los lados}$$

$$C.T. = 3\left(x^2\right) + 2\left(4xh\right)$$

$$576 = 3x^2 + 8xh$$

Sustituyendo $h = \dfrac{384}{x^2}$ y resolviendo la ecuación para x

$$576 = 3x^2 + 8x\left(\frac{384}{x^2}\right)$$

$$576 = 3x^2 + \frac{3072}{x}$$

$$576x = 3x^3 + 3072$$

$$x^3 - 192x + 1024 = 0$$

Las posibles raíces racionales positivas de esta ecuación son

$$\text{factores de } 1024 = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024$$

Al utilizar división sintética se obtiene que la única raíz positiva es $x = 8$.

La altura de le caja es entonces

$$h = \frac{384}{x^2} = \frac{384}{(8)^2} = 6$$

Por lo tanto, las dimensiones de la caja son:

base cuadrada de 8 cm y altura 6 cm.