5.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

OBJETIVOS

- Utilizar las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales. Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas utilizando propiedades de los logaritmos.
- Utilizar las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones logarítmicas.
- Resolver problemas sobre aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas, en los
- cuales es necesario resolver una ecuación exponencial o logarítmica.

Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella en la cual la incógnita se encuentra en el exponente de algunos de los términos de la ecuación. En los ejemplos siguientes se muestran algunas técnicas para resolver ecuaciones exponenciales.

Ejemplo 1: Resolviendo ecuaciones exponenciales

Resuelva las ecuaciones exponenciales

a. $5^{3x} = 40$ **b.** $200 = 800e^{-0.04x}$ **c.** $9^{2x-1} = 3^{x+2}$

Solución

a. Cuando la variable se encuentra sólo en el exponente de uno de los términos de la ecuación, ésta se puede resolver aplicando logaritmos naturales o logaritmos comunes a ambos lados de la ecuación y luego utilizando las propiedades de los logaritmos para despejar x. Se utilizarán logaritmos naturales

$$5^{3x} = 40$$

$$\log\left(5^{3x}\right) = \log(40)$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos para trasladar la variable que se encuentra en el exponente a la base de la ecuación

$$3x\log 5 = \log(40)$$

Despejando x y utilizando una calculadora para evaluar el resultado se obtiene

$$x = \frac{\log 40}{3\log 5} \approx 0.7640$$

Para comprobar la respuesta se sustituye el valor encontrado en la ecuación dada

$$5^{3(0.7640)} = 40$$

$$5^{2.292} = 40$$

$$39.998 \approx 40$$

Como el valor satisface la ecuación dada, se concluye que la solución de la ecuación es $x = 0.7640$.

b. Para resolver ésta ecuación conviene aislar el término que contiene la incógnita antes de aplicar logaritmos

$$200 = 800e^{-0.04x}$$

$$\frac{200}{800} = e^{-0.04x}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-0.04x}$$

Ahora se aplican logaritmos naturales a ambos lados, ya que la incógnita está como exponente de la función exponencial natural; en seguida se utilizan propiedades de los logaritmos y se despeja la incógnita

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(e^{-0.04x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -0.04x \ln e$$

Por la propiedad $\log_a a = 1$, se tiene que $\ln e = 1$, entonces

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -0.04x$$

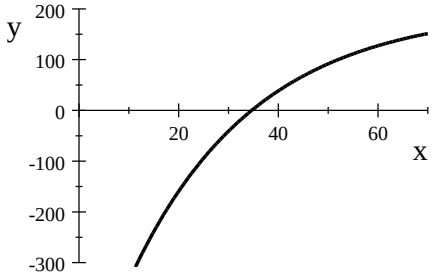
$$-0.04x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x = -\frac{1}{0.04}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

Al usar una calculadora para aproximar el resultado se tiene que $x \approx 34.657$

Si se dispone de una calculadora con la capacidad de dibujar gráficas o de un programa de cómputo matemático, es posible comprobar la respuesta dibujando la gráfica de la función $f(x) = 200 - 800e^{-0.04x}$.

El punto donde la gráfica intercepta al eje x debe coincidir con la solución obtenida por procedimientos algebraicos. La figura siguiente muestra la gráfica de la función dibujada con el programa Scientific Notebook, donde se puede ver que la solución obtenida es la correcta



c. En este caso la variable aparece en ambos lados de la ecuación, aun así es posible utilizar el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores para resolverla. Al aplicar logaritmos naturales y sus propiedades a ambos lados se tiene

$$9^{2x-1} = 3^{x+2}$$

$$\ln\left(9^{2x-1}\right) = \ln\left(3^{x+2}\right)$$

$$(2x-1)\ln 9 = (x+2)\ln 3$$

Desarrollando productos y trasladando los términos con la incógnita al lado izquierdo se tiene

$$2x\ln 9 - \ln 9 = x\ln 3 + 2\ln 3$$

$$2x\ln 9 - x\ln 3 = 2\ln 3 + \ln 9$$

Factorizando y despejando la incógnita para obtener la solución de la ecuación

$$x(2\ln 9 - \ln 3) = 2\ln 3 + \ln 9$$

$$x = \frac{2\ln 3 + \ln 9}{2\ln 9 - \ln 3}$$

La expresión anterior se puede evaluar con una calculadora o simplificarla un poco más utilizando propiedades de los logaritmos como se muestra a continuación

$$x = \frac{2\ln 3 + \ln 9}{2\ln 9 - \ln 3} = \frac{\ln 3^2 + \ln 9}{\ln 9^2 - \ln 3} = \frac{\ln(9 \cdot 9)}{\ln\left(\frac{81}{3}\right)} = \frac{\ln 81}{\ln 27} = \frac{\ln 3^4}{\ln 3^3} = \frac{4\ln 3}{3\ln 3} = \frac{4}{3}$$

Se deja al estudiante como ejercicio que haga la prueba para comprobar la respuesta.

¿Cree usted que ésta última ecuación puede ser resuelta utilizando únicamente las leyes de los exponentes? Si es así trate de resolverla.

Ejemplo 2: Resolviendo ecuaciones exponenciales por sustitución

Resuelva las ecuaciones exponenciales

a. $4^x - 7(4^{-x}) = 6$ **b.** $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 3$

Solución

a. La ecuación puede expresarse como

$$4^x - \frac{7}{4^x} = 6$$

Al hacer la sustitución $w = 4^x$ se obtiene y resolver la ecuación resultante

$$w - \frac{7}{w} - 6 = 0$$

$$w^2 - 6w - 7 = 0$$

$$(w - 7)(w + 1) = 0$$

$$w = 7 \quad \& \; w = -1$$

Para cada valor de w hay que encontrar el correspondiente valor de x.

Para $w = 7$ se tiene

$$4^x = 7$$

$$\ln\left(4^x\right) = \ln(7)$$

$$x\ln 4 = \ln 7$$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 4}$$

Para $w = -2$ se tiene

$$4^x = -1$$

$$\ln(4^x) = \ln(-1)$$

Lo cual no es posible ya que el dominio de la función logarítmica es el conjunto de los reales positivos.

b. Eliminando exponentes negativos y haciendo la sustitución $u = e^x$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 3$$

$$\frac{e^x + \dfrac{1}{e^x}}{e^x - \dfrac{1}{e^x}} = 3$$

$$\frac{u + \dfrac{1}{u}}{u - \dfrac{1}{u}} = 3$$

Efectuando operaciones y resolviendo la ecuación resultante

$$\frac{\dfrac{u^2 + 1}{u}}{\dfrac{u^2 - 1}{u}} = 3$$

$$\frac{u^2 + 1}{u^2 - 1} = 3$$

$$u^2 + 1 = 3u^2 - 3$$

$$2u^2 = 4$$

$$u = \pm\sqrt{2}$$

Encontrando el valor de x para $u = \sqrt{2}$ se tiene

$$e^x = \sqrt{2}$$

$$\ln(e^x) = \ln\sqrt{2}$$

$$x \ln e = \ln\sqrt{2}$$

$$x = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Para $u = -\sqrt{2}$ la ecuación no tiene solución ya que la función logaritmo natural no está definida para números negativos.

Ejemplo 3: Resolviendo una ecuación exponencial usando las leyes de los exponentes

Resuelva la ecuación exponencial

$$4^{x+3} + 9^{x+3} = 12 \cdot 6^{x+2}$$

Solución

Observe que en ésta ecuación la variable se encuentra como exponente de varios términos que se están sumando, razón por la cual, al aplicar logaritmos a ambos lados de la ecuación no se logra resolver la misma. De hecho, la dificultad de ésta ecuación es mayor que la de los ejemplos anteriores y su solución requiere algo de ingenio. Primero observe que $4 = 2^2$, qué $9 = 3^2$ y qué $6 = (2)(3)$. Reemplazando en la ecuación y utilizando las leyes de los exponentes se tiene

$$(2^2)^{x+3} + (3^2)^{x+3} = 12 \cdot (2 \cdot 3)^{x+2}$$

$$2^{2x+6} + 3^{2x+6} = 12 \cdot 2^{x+2} \cdot 3^{x+2}$$

$$2^6 \cdot 2^{2x} + 3^6 \cdot 3^{2x} = 12 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^x \cdot 3^x$$

$$64 \cdot 2^{2x} + 729 \cdot 3^{2x} = 432 \cdot 2^x \cdot 3^x$$

Ahora, dividiendo ambos lados de la ecuación entre 2^{2x} se obtiene

$$\frac{64 \cdot 2^{2x}}{2^{2x}} + \frac{729 \cdot 3^{2x}}{2^{2x}} = \frac{432 \cdot 2^x \cdot 3^x}{2^{2x}}$$

$$64 + 729\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 432\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$$

Haciendo la sustitución $u = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ se obtiene la ecuación cuadrática

$$729u^2 - 432u + 64 = 0$$

La cual al resolverla por fórmula cuadrática nos da

$$u = \frac{432 \pm \sqrt{(432)^2 - 4(729)(64)}}{(2)729} = \frac{432 \pm 0}{1458} = \frac{432}{1458} = \frac{8}{27}$$

Sustituyendo el valor de u para encontrar el valor de x se tiene

$$\frac{8}{27} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$$

De donde la solución de la ecuación es $x = -3$

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones que involucran logaritmos se llaman ecuaciones logarítmicas. Un procedimiento que usualmente funciona para resolverlas consiste en expresar ambos lados de la ecuación como un solo logaritmo de la misma base y luego eliminar los logaritmos a ambos lados de la ecuación para obtener una ecuación que no contenga logaritmos. Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento anterior.

Ejemplo 4: Resolviendo una ecuaciones logarítmicas

Resuelva las ecuaciones logarítmicas

a. $\log 2x - \log(x - 3) = 1$ **b.** $\ln(3x + 8) = \ln(2x + 2) + \ln(x - 2)$

Solución

a. El procedimiento que usualmente permite resolver una ecuación logarítmica consiste en expresar ambos lados de la ecuación como un solo logaritmo; para lograr esto se utilizan las propiedades de los logaritmos. Para la ecuación de éste ejemplo se tiene que el lado izquierdo puede expresarse como el logaritmo de un cociente y para el lado derecho se puede usar la propiedad: $\log_a a^x = x$, que expresada en base 10 nos da $\log 10^1 = 1$

$$\log 2x - \log(x-3) = 1$$

$$\log\left(\frac{2x}{x-3}\right) = \log 10^1$$

Como ambos lados de la ecuación tienen logaritmo, éste puede cancelarse utilizando la propiedad: $\log_a M = \log_a N$ entonces $M = N$. Al eliminar los logaritmos, se obtiene una ecuación algebraica, de la cual, algunas de sus soluciones son las soluciones de la ecuación logarítmica. La ecuación sin logaritmos es

$$\frac{2x}{x-3} = 10^1$$

Despejando x se obtiene

$$\frac{2x}{x-3} = 10$$

$$2x = 10(x-3)$$

$$2x = 10x - 30$$

$$2x - 10x = -30$$

$$-8x = -30$$

$$x = \frac{-30}{-8} = \frac{15}{4}$$

Sustituyendo $x = \frac{15}{4}$, en la ecuación dada para verificar la respuesta se tiene

$$\log\left(2 \times \frac{15}{4}\right) - \log\left(\frac{15}{4} - 3\right) = 1$$

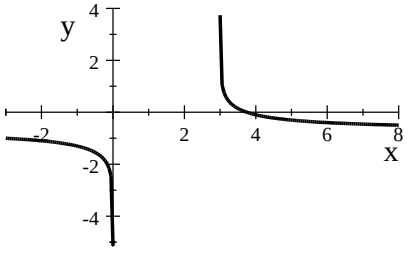
$$\log\left(\frac{15}{2}\right) - \log\left(\frac{3}{4}\right) = 1$$

$$0.87506 - (-0.12493) = 1$$

$$0.99999 \approx 1$$

Lo cual comprueba que $x = \frac{15}{4}$ es solución de la ecuación.

Usando una computadora para dibujar la gráfica de la función $f(x) = \log 2x - \log(x-3) - 1$, se puede aproximar la solución de la ecuación al localizar el punto donde la gráfica intercepta al eje x, como se muestra en la figura siguiente



b. Para resolver ésta ecuación se expresan ambos lados de la ecuación como un solo logaritmo

$$\ln(3x+8) = \ln(2x+2) + \ln(x-2)$$

$$\ln(3x+8) = \ln[(2x+2)(x-2)]$$

Como ambos lados de la ecuación tienen logaritmo, éste puede cancelarse utilizando la propiedad: $\ln M = \ln N$ entonces $M = N$

$$(3x+8) = (2x+2)(x-2)$$

Ahora se resuelve la ecuación cuadrática resultante desarrollando productos y usando factorización o fórmula general

$$3x + 8 = 2x^2 - 4x + 2x - 4$$

$$3x + 8 = 2x^2 - 2x - 4$$

$$3x + 8 - 2x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$-2x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

Factorizando la última ecuación se obtiene

$$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x = 4$$

Se deja al lector que compruebe los resultados anteriores en la ecuación propuesta, al hacer esto encontrará que únicamente $x = 4$ satisface la ecuación, por lo que se concluye que la solución de la ecuación es $x = 4$.

Ejercicios de la sección 5.5

En los ejercicios 1 a 20 resuelva la ecuación exponencial

1. $3^x = 81$

2. $16^x = \dfrac{1}{256}$

3. $4^{5x+3} = \dfrac{1}{8}$

4. $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \dfrac{125}{8}$

5. $5^{-2x} = 125$

6. $e^{2-3x} = 100$

7. $3^{x+4} = 5^{2-4x}$

8. $7^{3x-1} = 4^{2x+6}$

9. $1000 = 100e^{-0.03t}$, despeje t

10. $\dfrac{1}{e^x - e^{-x}} = 4$, encuentre x

11. $P = \dfrac{100}{1 + 40e^{-0.088t}}$, despeje t

12. $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$, despeje x

13. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 15$

14. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 3$

15. $12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0$

16. $8\left(2^{2-x}\right) = \left(2^{1-x}\right)^3$

17. $2^{x^2-x-3} = \dfrac{1}{2}$

18. $3 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{x-1} - 1 = 0$

19. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = \dfrac{1}{5}$

20. $\left(\dfrac{7}{12}\right)^x \cdot \left(\dfrac{6}{7}\right)^{x-1} = \dfrac{14}{3}$

En los ejercicios 21 a 40 resuelva la ecuación que contiene logaritmos

21. $\log_6 x = \log_6 5 - 1$

22. $\log_2(x + 1) = 5$

23. $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4$

24. $\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6$

25. $\ln(x^2 - 9x + 18) = \ln(3x - 9)$

26. $\log_{12}(x - 7) = 1 - \log_{12}(x - 3)$

27. $\log_{x+1}(6x + 1) = 2$

28. $\log_x(6 + x - x^2) = 2$

29. $2\log_{25}(x - 3) - 1 = \log_5(x - 7)$

30. $4(\log_3 x)^2 - 14\log_9 3x + 7 = 0$

31. $(\log_4 x)^2 + \log_4 4x - 1 = 0$

32. $\ln(x^2) = (\ln x)^2$

33. $3(\log_5 x)^2 = 3 - 2\log_5 5x$

34. $\log_2(9 - 2^x) = 25^{\log_5 \sqrt{3-x}}$

35. $x^{\log x^4 - 5\log x} = \dfrac{1}{10^4}$

36. $x^{1+\log x} = 10x$

37. $10^{\log^2 x} + x^{\log x} = 2$

38. $6 \cdot 10^{\log^2 x} + 4x^{\log x} = 10^5$

39. $\log(1 + x) \cdot \log(1 + x)^2 = 8$

40. $\dfrac{1}{4}\log(x + 3)^4 - \dfrac{4}{\log(x + 3)} = 0$