5.5 Propiedades de los logaritmos

OBJETIVOS

- Utilizar las propiedades de los logaritmos para representar el logaritmo de una expresión como una o suma o diferencia de logaritmos
- Utilizar las propiedades de los logaritmos para expresar una suma o diferencia de logaritmos como un solo logaritmo.
- Utilizar las propiedades de los logaritmos para dibujar la representación gráfica de funciones con logaritmos.

Propiedades de los logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, tienen muchas propiedades que pueden ser demostradas utilizando las leyes de los exponentes. La tabla que sigue contiene todas las propiedades de los logaritmos, las propiedades 1 a 4 se derivan directamente de la definición de logaritmo mientras que las propiedades 5 a 11 se pueden demostrar utilizando las leyes de los exponentes ya que los logaritmos no son más que exponentes.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Si a, b, M y N son números reales positivos y $a \neq 1$, $b \neq 1$ y p es cualquier número real, entonces:

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

3. $\log_a \left(a^p\right) = p$

4. $a^{\log_a p} = p$, para $p > 0$

5. $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

6. $\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

7. $\log_a (M)^p = p\log_a M$

8. $\log_a \sqrt[p]{M} = \dfrac{1}{p}\log_a M$

9. Si $\log_a M = \log_a N$, entonces $M = N$

10. Si $M = N$ entonces $\log_a M = \log_a N$,

11. $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b}$, (Formula de cambio de base)

Demostración de la propiedad 6

La propiedad 6 establece que

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

Sea

$$x = \log_a M \quad \text{y} \quad \text{sea } y = \log_a N$$

Por la definición de logaritmo se tiene que

$$M = a^x \quad \text{y} \quad N = a^y$$

Entonces

$$\begin{aligned}\log_a\left(\frac{M}{N}\right) &= \log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = \log_a\left(a^{x-y}\right)\\ &= x - y\\ &= \log_a M - \log_a N\end{aligned}$$

Demostración de la propiedad 11

La propiedad 11 establece que

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

Sea

$$x = \log_b M \quad \text{y} \quad y = \log_a b$$

Por la definición de logaritmo se tiene que

$$M = b^x$$

Entonces

$$\log_a M = \log_a\left(b^x\right)$$

$$\log_a M = x\log_a b$$

$$\frac{\log_a M}{\log_a b} = x$$

$$\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$$

Las demás propiedades se demuestran de forma similar. Los ejemplos siguientes ilustran el uso de las propiedades de los logaritmos para reescribir expresiones algebraicas que contienen logaritmos.

Ejemplo 1: Uso de las propiedades de los logaritmos

Use las propiedades de los logaritmos para expresar los siguientes logaritmos en términos de los logaritmos de x, y y z

a. $\log\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$ **b.** $\ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2z}{\sqrt{y}}}$

Solución

a. Primero expresamos el logaritmo del cociente como una resta de logaritmos

$$\log\left(\frac{x^2}{yz^3}\right) = \log(x^2) - \log\left(yz^3\right)$$

Ahora descomponemos el logaritmo del producto como una suma de logaritmos, teniendo el cuidado de agrupar los términos precedidos del signo menos

$$\log\left(\frac{x^2}{yz^3}\right) = \log(x^2) - \left(\log y - \log z^3\right)$$

Finalmente se eliminan los signos de agrupación y se utiliza la propiedad para el logaritmo de una potencia.

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x^2}{yz^3}\right) &= \log(x^2) - \log y + \log z^3 \\ &= 2\log x - \log y + 3\log z\end{aligned}$$

b. En este caso primero se utiliza la propiedad para el logaritmo de una raíz

$$\ln\sqrt[3]{\frac{x^2z}{\sqrt{y}}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x^2z}{\sqrt{y}}\right)$$

Ahora se utiliza las propiedades del logaritmo de un cociente y un producto como en el inciso anterior

$$\begin{aligned}\ln\sqrt[3]{\frac{x^2z}{\sqrt{y}}} &= \frac{1}{3}\left(\ln(x^2z) - \ln\sqrt{y}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\ln(x^2) + \ln z - \ln\sqrt{y}\right)\end{aligned}$$

Utilizando ahora las propiedades para el logaritmo de una potencia y de una raíz se tiene

$$\ln\sqrt[3]{\frac{x^2z}{\sqrt{y}}} = \frac{1}{3}\left(2\ln x + \ln z - \frac{1}{2}\ln y\right)$$

Finalmente se desarrollan los productos y se eliminan los signos de agrupación para obtener la respuesta requerida

$$\ln\sqrt[3]{\frac{x^2z}{\sqrt{y}}} = \frac{2}{3}\ln x + \frac{1}{3}\ln z - \frac{1}{6}\ln y$$

Ejemplo 2: Uso de las propiedades de los logaritmos

Use las propiedades de los logaritmos para reescribir la expresión dada como un solo logaritmo

a. $2\log x + \frac{1}{2}\log(x-1) - \log(x+1)$

b. $\frac{1}{3}\left(\ln y - 4\ln\frac{1}{x} - 3\ln(x+y)\right)$

Solución

a. Primero los coeficientes numéricos de cada logaritmo son expresados como el logaritmo de una potencia, o bien como el logaritmo de una raíz cuando el coeficiente es una fracción

$$2\log x + \frac{1}{2}\log(x-1) - \log(x+1) = \log x^2 + \log\sqrt{x-1} - \log(x+1)$$

Ahora las sumas de logaritmos se expresan como el logaritmo de un producto y las restas como el logaritmo de un cociente como se muestra a continuación

$$2\log x + \frac{1}{2}\log(x-1) - \log x = \log\left(\frac{x^2\sqrt{x-1}}{x+1}\right)$$

b. En este caso, como $\frac{1}{3}$ es factor de toda la expresión, significa que

$$\frac{1}{3}\left(\ln y - 4\ln\frac{1}{x} - 3\ln(x+y)\right) = \sqrt[3]{\ln y - 4\ln\frac{1}{x} - 3\ln(x+y)}$$

La expresión dentro de la raíz cúbica se puede reagrupar como se muestra y expresar como el logaritmo de un cociente

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\ln y - 4\ln\frac{1}{x} - 3\ln(x+y)\right) &= \sqrt[3]{\ln y - \left(4\ln\frac{1}{x} + 3\ln(x+y)\right)}\\ &= \sqrt[3]{\ln y - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \ln(x+y)^3\right)}\\ &= \sqrt[3]{\ln\left(\frac{y}{\left(\frac{1}{x}\right)^4(x+y)^3}\right)}\\ &= \sqrt[3]{\ln\left(\frac{x^4 y}{(x+y)^3}\right)}\end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 5.5

En los ejercicios 1 a 10, escriba la expresión como una suma y resta de logaritmos

1. $\log_2(xyz)$

2. $\log\left(x^2y^4\right)$

3. $\ln\left(\frac{xy}{x}\right)$

4. $\log_3\left(\frac{x^3}{9y^2}\right)$

5. $\log_2\left[x^2\left(\frac{32y}{z^{1/2}}\right)\right]$

6. $\log\frac{x^3w}{y^2z^4}$

7. $\ln\left(\frac{x+y}{x^3\sqrt{x}}\right)^5$

8. $\log\sqrt[3]{\frac{x^3y^4}{z(z-3)^2}}$

9. $\ln\frac{x^3\sqrt{x-y}}{z^4w^3}$

10. $\log_2\left(x^3\sqrt{\frac{8x^5}{w^4}}\right)$

En los ejercicios 11 a 20 escriba las expresiones dadas como un solo logaritmo

11. $2\ln x + \ln(x+y)$

12. $\log_4 x + \log_4 3 - \log_4 y$

13. $2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+y) + \frac{1}{3}\ln(x-y)$

14. $3\log x + 2\log y - \frac{2}{3}\log z - \frac{1}{3}\log w$

15. $2\ln x - 4\ln\left(\frac{1}{y}\right) - 3\ln x - 3\ln y + 1$

16. $5\log x - 4\log(x-y) + \frac{3}{2}\log(x+y) - 1$

17. $2\log_2 x^2 + \log_4 y$

(Use la fórmula de cambio de base).

18. $\log_3(x+5) + \log_9(x-5) - \log_{27}(x^2-25)$

19. $2\log_{25}(x-3) - 1 - \log_5(x-7)$

20. $\log_4(x^3-y^3) - \log_8(x-y)$