

5.3 Función exponencial natural

OBJETIVOS

- Dibujar la gráfica de una función exponencial, utilizando los conceptos de transformación de funciones.
- Resolver problemas de aplicación en los cuales se da el modelo exponencial natural correspondiente.

Función Exponencial natural

El número irracional π es utilizado en aplicaciones de la trigonometría. De la misma forma el número irracional e es utilizado en aplicaciones que involucran el comportamiento de poblaciones, decaimiento radiactivo, etc. El número e es un número irracional y su valor se puede aproximar utilizando procedimientos del Cálculo diferencial e integral. Se puede mostrar que cuando n tiende a ∞ , la expresión algebraica siguiente tiende al número e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ se aproxima a } e \text{ cuando } n \text{ tiende al } \infty$$

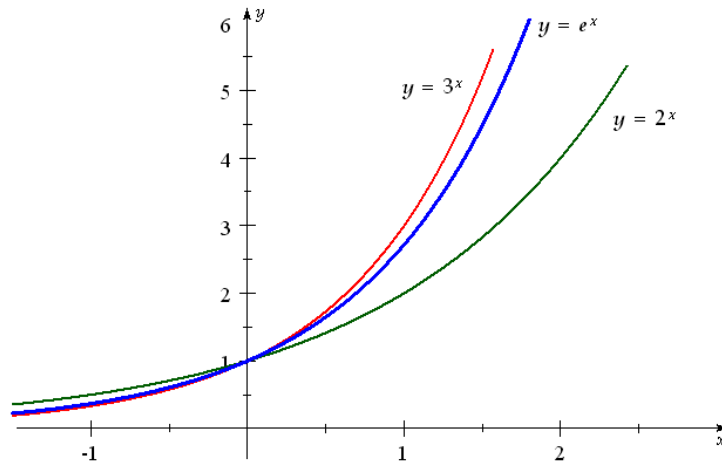
La letra e es en honor del gran matemático Leonhard Euler (1717-1783) quién calculó e para grandes valores de n

Valor de n	Valor de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.000000000
10	2.593742460
100	2.704813829
1,000	2.716923932
10,000	2.718145927
100,000	2.718268237
1,000,000	2.718280469
10,000,000	2.718281693

El valor exacto de e con 8 cifras decimales es $e \approx 2.71828183$

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL
La función exponencial natural se define como
$f(x) = e^x$
donde x es un número real.

La figura siguiente muestra la gráfica de la función exponencial natural y las gráficas de las funciones 2^x y 3^x



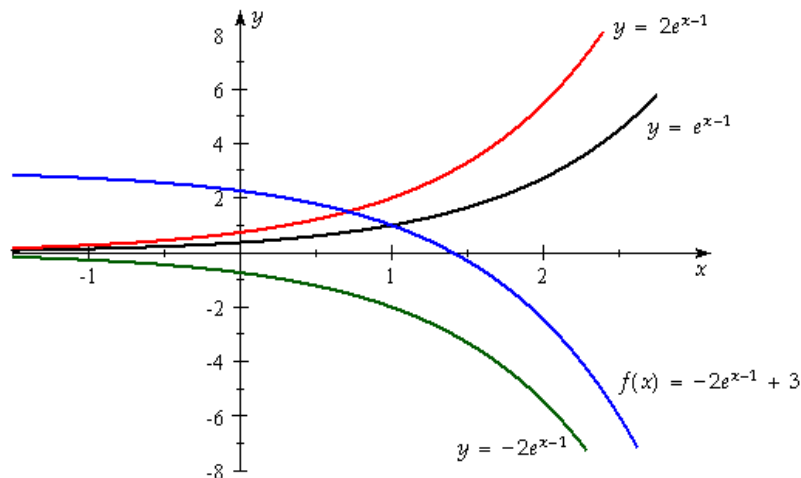
Ejemplo 1: Uso de transformaciones para dibujar una gráfica exponencial

Utilice la gráfica de la función exponencial natural y los criterios de transformaciones de las gráficas para dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = -2e^{x-1} + 3$$

Solución

La gráfica de la función $y = e^{x-1}$, mostrada en color negro en la figura, se obtiene desplazando 1 unidad a la derecha la gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$. En la gráfica de la función $y = 2e^{x-1}$, se muestra en color rojo, el coeficiente 2 amplifica la función 2 unidades en el eje y. La gráfica de la función $f(x) = -2e^{x-1}$, es mostrada en color verde, se obtiene reflejando en eje x la gráfica de $y = 2e^{x-1}$. Finalmente, la gráfica de la función $f(x) = -2e^{x-1} + 3$, mostrada en color azul, se obtiene desplazando 3 unidades hacia arriba la gráfica de $y = -2e^{x-1}$. La figura siguiente muestra las 4 transformaciones realizadas



Casi todas las aplicaciones de las funciones exponenciales son expresadas en términos de la función exponencial natural, entre ellas la ley de crecimiento natural.

LEY DE CRECIMIENTO O DECAIMIENTO NATURAL

Si P_0 es el número de elementos de una población en el tiempo $t = 0$, la razón a la cual cambia la población en el tiempo t , es proporcional a la población P .

Al utilizar procedimientos del Cálculo diferencial e integral se obtiene la siguiente fórmula

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Donde k es la tasa de crecimiento natural. Si $k > 0$ la población aumenta y si $k < 0$ la población disminuye $k < 0$.

Ejemplo 2: Crecimiento demográfico

La población de Nigeria en 1996 era aproximadamente de 104 millones de personas y estaba creciendo a una tasa de 3% anual.

- Escriba una fórmula que exprese la población de Nigeria en el tiempo t en años.
- Estime la población de Nigeria para el año 2,010

Solución

- Tomando $t = 0$ para el año 1996 se tiene que $P_0 = 104$. Como la población crece a una tasa del 3% la constante k está dada por $k = \frac{3}{100} = 0.03$; por lo que la fórmula para la población de Nigeria es

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 104e^{0.03t}$$

- En el año 2,010 el tiempo transcurrido a partir de 1,996 es $t = 2,010 - 1,996 = 14$ años, que al evaluarlo en la fórmula da

$$P(14) = 104e^{0.03(14)} = 158.284$$

Es decir que en el año 2,010 Nigeria tendrá una población aproximada de 158 millones de personas.

Ejemplo 3: Campaña publicitaria

Una compañía está intentando dar a conocer un nuevo producto mediante comerciales de televisión en una ciudad con 3 millones de habitantes. Un modelo para calcular el número de personas que conocen el producto después de t días de iniciada la campaña publicitaria está dado por

$$N(t) = 3,000,000(1 - e^{-0.034t})$$

- Calcule el porcentaje de la población que conoce el producto a los 10 días de publicidad.
- Utilice un programa de cómputo para dibujar la gráfica de la función para $0 \leq t \leq 120$

Solución

- A los 10 días la cantidad de personas que conoce el producto es

$$N(t) = 3,000,000(1 - e^{-0.034t}) = 3,000,000(1 - e^{-0.034(10)})$$

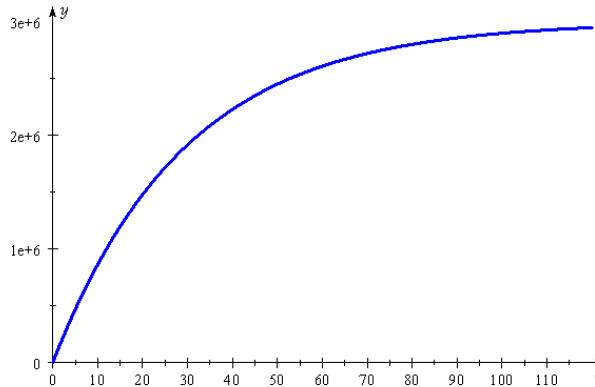
$$= 864,689.0317$$

El porcentaje que representa este número de personas es

$$\frac{864,689.0317}{3,000,000} = 0.2882 = 28.82\%$$

Por lo que a los 10 días el 28.82% de la ciudad conoce el producto.

- b. Al utilizar el programa Scientific Notebook para dibujar la representación gráfica de la función se obtiene



Al observar la gráfica se obtiene que a medida que el tiempo de publicidad aumenta el número de personas que conoce el producto también aumenta. A los 100 días de publicidad prácticamente toda la población de la ciudad conoce el producto.

Ejemplo 4: Modelación exponencial

La tabla siguiente muestra los datos de la población mundial en millones de personas entre los años de 1900 y 1990 en intervalos de 10 años

Año	1,900	1,910	1,920	1,930	1,940	1,950	1,960	1,970	1,980	1,990
P	1,650	1,750	1,860	2,070	2,300	2,520	3,020	3,700	4,450	5,300

- Utilice un programa de cómputo para obtener un modelo de la forma $P(t) = P_0 e^{kt}$ que se ajuste a los datos.
- Dibuje la representación gráfica de los datos y el modelo obtenido en el mismo sistema de coordenadas rectangulares.
- Utilice el modelo para aproximar la población mundial para el año 2,007

Solución

- a. Algunos programas de cómputo no tienen la capacidad de construir un modelo exponencial, razón por la cual en éste ejemplo se utilizara un procedimiento de linealización de los datos para obtener un modelo lineal y luego, a partir de él se obtendrá el modelo exponencial correspondiente.

Si los datos se comportan de forma exponencial, el logaritmo natural de ellos deberá comportarse de forma lineal. En la tabla siguiente muestra el año y el logaritmo natural de la población mundial P

Año	1,900	1,910	1,920	1,930	1,940	1,950	1,960	1,970	1,980	1,990
$\ln P$	7.41	7.47	7.53	7.64	7.74	7.83	8.01	8.22	8.40	8.57

Utilizando $t = 0$ para el año 1,990 y utilizando el programa Scientific Notebook para obtener un modelo lineal que se ajuste a los datos (véase el manual del laboratorio para más detalles sobre construcción de modelos), se obtiene el modelo lineal

$$\ln P = 0.0131512t + 7.2899454$$

A partir del modelo lineal se puede obtener el modelo exponencial aplicando función exponencial a ambos lados de la ecuación anterior y efectuando algunas operaciones algebraicas

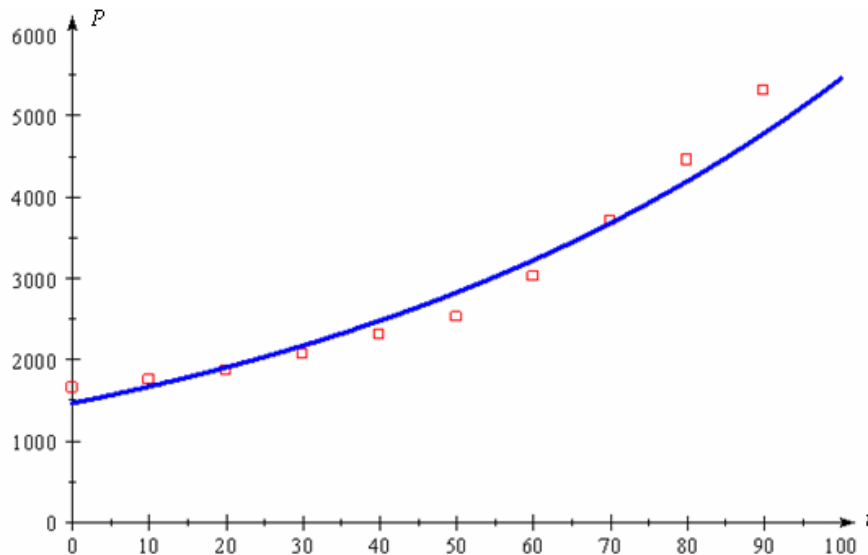
$$e^{\ln P} = e^{(0.0131512t + 7.2899454)}$$

$$P = e^{0.0131512t} e^{7.2899454}$$

$$P = 1465.49068e^{0.0131512t}$$

Por lo que el modelo exponencial buscado es $P = 1465.49068e^{0.0131512t}$

- b. La figura siguiente muestra la gráfica de los datos y del modelo exponencial, en la cual $t = 0$ corresponde al año 1,990.



- c. Utilizando el modelo para estimar la población mundial del año 2,007 se tiene que $t = 2,007 - 1,990 = 17$

$$\begin{aligned}
 P &= 1465.49068e^{0.0131512t} \\
 &= 1465.49068e^{0.0131512(17)} \\
 &= 1832.64
 \end{aligned}$$

De donde la población mundial en el año 2007 será aproximadamente de 1833 millones de personas.

Ejercicios de la sección 5.3

En los ejercicios 1 a 10 utilice transformaciones de las gráficas de funciones para dibujar la gráfica de la función.

1. $f(x) = e^{-x}$
2. $F(x) = -2e^x$
3. $f(x) = e^{x+2}$
4. $F(x) = -e^x + 3$
5. $F(x) = -e^{-x} + 1$
6. $F(x) = -2e^{x-3}$
7. $F(x) = -e^{-x}$
8. $f(x) = -e^{-x+2}$
9. $f(x) = e^{|x|} - 1$
10. $f(x) = -e^{-|x|} + 2$

En los ejercicios 11 a 17 resuelva la ecuación exponencial usando únicamente álgebra y las leyes de los exponentes

11. $e^{4x} = e^{2x-6}$
12. $e^{(x^2)} = e^{x-6}$
13. $e^{2x} - 1 = 0$
14. $xe^x - 2e^x = 0$
15. $xe^x + e^{x+1} = 0$
16. $4xe^{-x} - 2x^2e^{-x} = 0$
17. $8x^3e^{3x} + 6x^2e^{3x} = 0$

En los ejercicios 18 a 25 resuelva los problemas que se proponen

18. Una población de bacterias se puede modelar usando la fórmula

$$P(t) = 40,000e^{0.234t}$$

En donde el tiempo está expresado en horas. Calcule la cantidad de bacterias después de que han transcurrido 12 horas.

19. En las islas Caiman la tasa de crecimiento era de 4.25% anual para el año 1996. Si la población en ese año era de 34646 personas. Estime la población para el año 2013 si se mantiene la misma tasa de crecimiento.
20. El Guyana la población en el año 1996 estaba disminuyendo a una tasa de 0.9% al año. Si en ese año la población era de 712,000 personas, estime la población para el año 2010.

21. La presión atmosférica en pulgadas a una altura en pies sobre el nivel del mar está dada por

$$P(h) = 29e^{-0.000034h}$$

Calcule la presión atmosférica en la ciudad de Guatemala en donde la altura es aproximadamente 1,400 metros.

22. La longitud en centímetros de una especie de peces en cierto lago puede ser estimada por la función exponencial

$$P(t) = 80(1 - e^{-0.157t})$$

En donde t es el tiempo de vida del pez en años. Calcule la longitud de un pez de 3 años de edad.

23. La función exponencial

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Recibe el nombre de seno hiperbólico. Utilice una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función.

24. En estadística la función de distribución normal está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Utilice una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función.

25. Un modelo utilizado para estimar la estatura de un niño en edades de 0 a 6 años, está dado por

$$H(x) = 79.04 + 6.39x - \frac{26.076}{e^{0.993x}}$$

Donde H está en centímetros y x es la edad en años. Calcule la estatura que debe tener un niño de 5 años