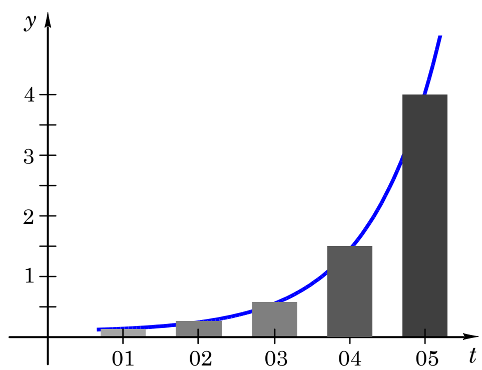
5.2 Funciones exponenciales

OBJETIVOS

- Dibujar la gráfica de una función exponencial, utilizando los conceptos de transformación de funciones.
- Resolver ecuaciones exponenciales elementales utilizando las leyes de los exponentes.
- Resolver problemas en los cuales se da el modelo exponencial correspondiente.
- Resolver problemas de interés compuesto.

Función exponencial

Las funciones exponenciales son de mucha utilidad pues con mucha frecuencia se utilizan para modelar datos. Por ejemplo, la gráfica de barras de la figura muestra las ventas, en millones de unidades, de computadoras entre los años de 2,001 y 2,005 en cierta ciudad. La función, en color azul, que se utiliza para modelar los datos es una **función exponencial**.



DEFINICIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL

La **función exponencial** f con base a se define como

$$f(x) = a^x$$

Donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es un número real.

En la definición de función exponencial, la base a debe ser positiva ya que si ésta fuera un número negativo, se obtendría como imagen números complejos para muchos valores de x. Por ejemplo, si la base es –4, al evaluar la función en $x = \frac{1}{2}$ el resultado sería

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{1/2} = \sqrt{-4} = -2i$$

Por otro lado la base no puede ser 1, pues la función $1^x = 1$ es una función constante para todo x. Algunos ejemplos de funciones exponenciales son los siguientes

$$f(x) = 3^x, \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad h(x) = e^x$$

Ejemplo 1: Gráfica de una función exponencial

Dibuje la representación gráfica de la función exponencial

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Solución

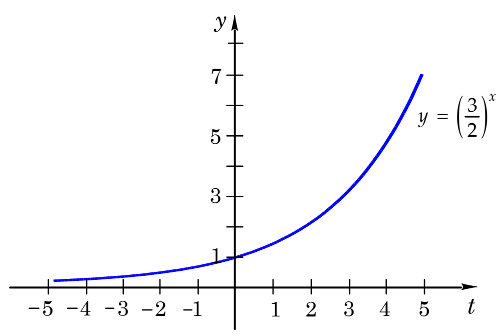
Para construir ésta gráfica se utilizará una tabla de valores, un procedimiento útil cuando no se tiene información sobre el comportamiento de una función. Se utilizarán valores para x entre -3 y 3, aunque otro conjunto de valores también puede dar la información necesaria para dibujar la gráfica

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$

Se muestra a continuación como se evalúa la función para $x = -3$ y $x = 2$

$$f(-3) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{3^{-3}}{2^{-3}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}, \qquad f(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Al dibujar los puntos de la tabla anterior en un sistema de coordenadas se obtiene la gráfica de la función exponencial



Las funciones exponenciales poseen propiedades que pueden ser de mucha utilidad para dibujar su gráfica o bien para resolver problemas que involucren estas funciones.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Si $f(x) = a^x$,con base a, donde $a > 0$, $a \neq 1$, entonces

1. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

2. El rango de f es el conjunto de los números reales positivos.

3. El intercepto de la gráfica de f con el eje y es el punto $(0,1)$.

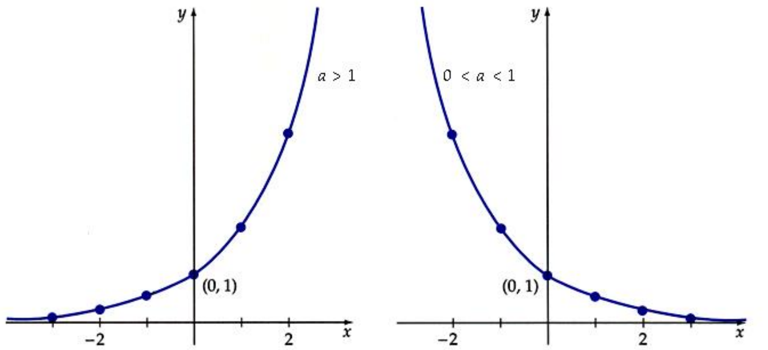
4. El eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

5. f es una función biunívoca.

6. f es una función creciente en todo su dominio si $a > 1$.

7. f es una función decreciente en todo su dominio si $0 < a < 1$.

La figura siguiente muestra las gráficas de una función exponencial de base $a > 1$ y otra con base $0 < a < 1$



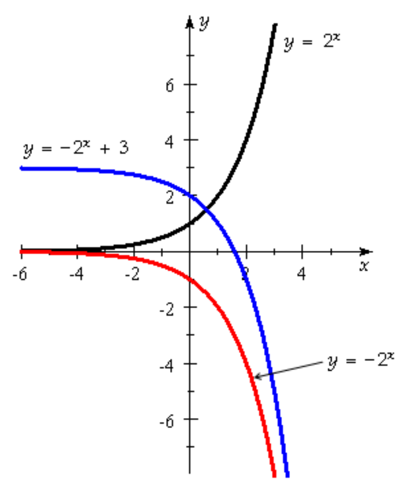
Ejemplo 2: Gráficas de funciones exponenciales usando transformaciones de funciones

Utilice las propiedades de traslación, compresión y reflexión para dibujar para dibujar las gráficas de las funciones

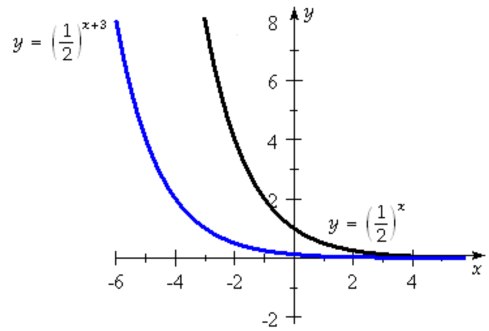
a. $f(x) = -2^x + 3$ **b.** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ **c.** $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

Solución

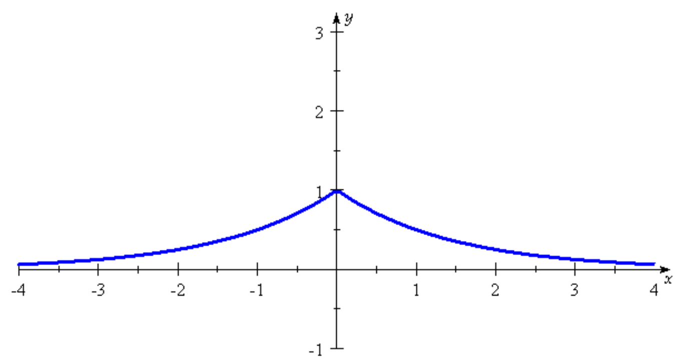
a. La gráfica de la función $f(x) = -2^x + 3$ se obtiene reflejando en el eje x la gráfica de la función $y = 2^x$ y luego desplazándola 3 unidades hacia arriba. La figura siguiente muestra en color negro la gráfica $y = 2^x$ en color negro, la gráfica de $y = -2^x$ en color rojo y la gráfica de $f(x) = -2^x + 3$ en color azul.



b. Para dibujar la gráfica de la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ primero se observa que la base $a = \frac{1}{2} < 1$, por lo tanto la gráfica de la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es una función exponencial decreciente y se muestra de color negro en la figura. Al sumar 3 al exponente la gráfica se desplaza 3 unidades hacia la izquierda y se muestra en color azul en la figura.



c. La función $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ tiene como exponente $|x|$, esto hace que $f(-x) = f(x)$ y por lo tanto la gráfica de es simétrica respecto al eje y. Para $x > 0$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ y la gráfica es decreciente ya que la base $a = \frac{1}{2} < 1$. La gráfica resultante se muestra en la figura siguiente



Ejemplo 3: Usando leyes de los exponentes para resolver una ecuación exponencial

Utilice las propiedades de los exponentes y de las funciones exponenciales para resolver la ecuación exponencial.

$$(25)^{3x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 125 \cdot \left(5^{x}\right)^{-3}$$

Solución

Utilizando las propiedades de los exponentes se puede expresar ambos lados de la ecuación como potencias de base 5

$$\begin{aligned}(25)^{3x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} &= 125 \cdot \left(5^{x}\right)^{-3} \\ \left(5^{2}\right)^{3x}\left(5^{-1}\right)^{x+1} &= \left(5^{3}\right)\left(5^{x}\right)^{-3} \\ (5)^{6x}(5)^{-1(x+1)} &= (5)^{3}(5)^{-3x} \\ (5)^{6x-1(x+1)} &= (5)^{3-3x}\end{aligned}$$

Como las funciones exponenciales son uno a uno, si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. Es decir que los exponentes en la ecuación anterior son iguales, por lo tanto

$$6x - 1(x+1) = 3 - 3x$$
$$5x - 1 = 3 - 3x$$
$$8x = 4$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Al hacer la prueba se verifica que $x = \frac{1}{2}$ es solución de la ecuación.

Ejemplo 4: Encontrando una fórmula para una función exponencial

Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$, sabiendo que intercepta al eje y en el punto $\left(0,-\frac{9}{5}\right)$, que pasa por el punto $\left(-3,-\frac{53}{40}\right)$ y que tiene asíntota horizontal $y = -2$

Solución

La gráfica de la función $y = ba^{-x}$ tiene como asíntota horizontal el eje x. Como la gráfica de $f(x) = ba^{-x} + c$ es la misma que la de $y = ba^{-x}$ desplazada c unidades hacia arriba o hacia abajo, se tiene que la recta $y = c$ es asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = ba^{-x} + c$. Como se sabe que $y = -2$ es asíntota horizontal, se concluye que $c = 1$.

Como la gráfica de f intercepta al eje y en el punto $\left(0,-\frac{9}{5}\right)$, entonces cuando $x = 0$, $y = \frac{-9}{5}$. Al sustituir estos valores en la expresión $y = ba^{-x} + 1$ se tiene

$$\frac{-9}{5} = ba^{-(0)} - 2$$
$$-\frac{9}{5} = b(1) - 2$$
$$b = -\frac{9}{5} + 2 = \frac{1}{5}$$

Repitiendo el proceso anterior para el punto $\left(-3,-\frac{53}{40}\right)$ se obtiene

$$y = ba^{-x} + c$$
$$-\frac{53}{40} = \left(\frac{1}{5}\right)a^{-(-3)} - 2$$
$$-\frac{53}{40} + 2 = \frac{a^3}{5}$$
$$\frac{27}{40} = \frac{a^3}{5}$$
$$a^3 = \frac{27}{8}$$
$$a = \frac{3}{2}$$

De donde la función buscada es $f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} - 2$

Aplicaciones de la función exponencial

Muchas aplicaciones se pueden modelar utilizando una función exponencial, especialmente aquellas que tienen que ver con el crecimiento o decrecimiento de una variable como función del tiempo; por ejemplo la desintegración de un material radiactivo, el crecimiento de poblaciones, el interés compuesto etc.

Ejemplo 5: Desintegración de un material radioactivo

La vida media del radio es aproximadamente 1600 años, es decir que a los 1600 años la cantidad inicial se habrá reducido a la mitad. Si en un experimento, la cantidad de miligramos que queda después de t años está dada por

$$q(t) = 50(2)^{-0.000625t}$$

a. Determine la cantidad inicial de radio radioactivo.

b. Determine la cantidad que queda después de que han transcurrido 1000 años.

Solución

a. La cantidad inicial se encuentra evaluando la función en $t = 0$

$$q(0) = 50(2)^{-0.000625(0)} = 50(2)^0 = (50)(1) = 50$$

Es decir que inicialmente había 50 miligramos de radio.

b. A los 1000 años la cantidad que queda de material radiactivo es

$$q(1000) = 50(2)^{0.000625(1000)} = (50)(2)^{-6.25} \approx 32.42$$

De donde la cantidad que queda a los 1000 años es aproximadamente 32.42 miligramos.

Ejemplo 6: Compra de un vehículo a plazos

Una formula financiera para determinar el pago mensual PM de una compra a plazos es la siguiente

$$\text{PM} = \frac{Pi}{12\left(1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-n}\right)}$$

Donde P es el valor inicial de la compra es llamado valor presente, i es la tasa de interés anual y n es el número total de pagos.

¿Cuál será el pago mensual de un auto con valor inicial de Q125,000.00 comprado a una tasa de interés del 8%, a un plazo de 4 años?

Solución

Los datos a sustituir en la fórmula son $P = 125{,}000$, Como la tasa de interés anual es 8% usamos $i = 0.08$ y como el plazo de la deuda es de 4 años entonces $n = 48$

$$\text{PM} = \frac{Pi}{12\left(1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-n}\right)} = \frac{(125{,}000)(0.08)}{12\left(1-\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{-48}\right)}$$

$$= \frac{10{,}000}{12(0.273079419\ 7)} = 3051.\ 615$$

De donde el pago mensual será aproximadamente de Q3,051.62

Interés compuesto

Una aplicación muy importante de la función exponencial es el interés compuesto. Si una suma de dinero P se invierte a una tasa de interés anual i, durante t años, entonces el capital acumulado S al final de t años es

$$S = P\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

donde; $P =$ capital inicial.

$i =$ tasa de interés anual expresada en forma decimal.

$n =$ períodos en los cuales se capitaliza durante un año.

$t =$ años durante los cuales se invierte el capital P.

Ejemplo 6: Interés compuesto

El señor Juárez deposita en su cuenta bancaria Q25,000, para la educación futura de sus hijos. Si el banco le otorga una tasa de interés del 3.5% capitalizado mensualmente. Determine el capital acumulado en la cuenta después de 6 años.

Solución

Cuando se utiliza la fórmula de interés compuesto, hay que tener mucho cuidado con los datos que se sustituyen, para obtener los resultados correctos. En este ejemplo se tiene

$P = 25{,}000$

$i = 3.5\% = \frac{3.5}{100} = 0.035$

$n = 12$, ya que se capitaliza 12 veces en el año (mensual).

$t = 6$, ya que el tiempo que deposita el dinero es de 6 años.

Entonces:

$$S = P\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = 25{,}000\left(1+\frac{0.035}{12}\right)^{12(6)} \approx 30{,}832.53$$

De donde el dinero acumulado en la cuenta al final de los 6 años es de Q30,832.53.

Ejercicios de la sección 5.2

En los ejercicios 1 a 5 utilice una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función exponencial

1. $f(x) = 3^x$

2. $F(x) = 2^x$

3. $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

4. $F(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

5. $F(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

En los ejercicios 6 a 15 utilice transformaciones de las gráficas de funciones para dibujar la gráfica de la función.

6. $F(x) = 2^x - 3$

7. $F(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2$

8. $f(x) = 3^{x+2}$

9. $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - 5$

10. $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

11. $f(x) = 2^{-x} + 3$

12. $F(x) = -2(3)^x - 2$

13. $F(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 5$

14. $F(x) = 3^{|x|} - 4$

15. $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} + 3$

En los ejercicios 16 a 25 utilice las leyes de los exponentes para resolver la ecuación exponencial

16. $2^{x^2} = 2^4$

17. $4^x = \frac{1}{64}$

18. $2^{x^2-x-3} = \frac{1}{2}$

19. $9^{x-3} = 27^{4-x}$

20. $64^{x-1} = 16^{2x-3}$

21. $9^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3-2x} = 27 \cdot (3^x)^2$

22. $2^{2x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 8 \cdot (2^x)^{-2}$

23. $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{x+1} = \frac{5}{2}$

24. $2^{x+2} \cdot 3^{x-2} = 16 \cdot 36^{x-2}$

25. $\left(\frac{7}{12}\right)^x \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{x-1} = \frac{14}{3}$

En los ejercicios 26 a 34 resuelva los problemas que se proponen

26. 150 cebras se introducen en una reserva para animales. El número de cebras después de transcurridos t años está dado por

$$P(t) = 150(1.1)^t$$

Calcule el número de cebras después de 6 años.

27. Después de finalizado el tratamiento con un antibiótico, la cantidad del medicamento que queda en el cuerpo t está dado por

$$C(t) = 40(0.7)^t$$

a. Estimar la cantidad del medicamento que queda en el cuerpo después de 24 horas de finalizado el tratamiento.

b. ¿Qué porcentaje del medicamento que aún está en el cuerpo es eliminado cada hora?

28. En cierto pueblo la población puede ser modelada por la función exponencial

$$P(t) = 200000(1.03)^t$$

En donde t es el tiempo transcurrido en años.

a. ¿Cuál es la población inicial del pueblo?

b. ¿Cuál será la población dentro de 20 años?

29. Un material radioactivo tiene una vida media de 5 días. Si hay una cantidad inicial de 200 miligramos de material, la cantidad que queda después de t días se puede modelar con la función

$$C(t) = 200(2)^{-t/5}$$

Use una tabla de valores para construir la gráfica de la función para $0 \le t \le 20$.

30. Se invierten Q5,000 en una cuenta que otorga una tasa de interés del 3% anual compuesto mensualmente. Suponiendo que no se hacen depósitos adicionales,

a. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al finalizar el primer año?

b. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 15 años?

31. En 1996 la Organización Mundial de la Salud estimó que en el mundo había 7.7 millones de personas infectadas con el virus de SIDA. Suponiendo que la enfermedad se expande a una tasa anual del 17%,

a. Construya una fórmula exponencial para estimar el número de personas infectadas por el virus del SIDA en función del tiempo t expresado en años donde $t = 0$ corresponde al año 1996.

b. Utilice la fórmula del inciso anterior para estimar el número de personas infectadas con el virus en el año 2007.

32. Una propiedad tiene un valor actual de Q500,000 y se estima su plusvalía es del 5% anual. Estime el valor del inmueble dentro de 10 años.

33. El valor de un automóvil en el mercado nacional tiene una depreciación anual del 10%. Si un auto de agencia tiene un valor inicial de Q140,000. Estime el valor al cual se puede vender después de 5 años de uso.

34. Una tarjeta de crédito cobra una tasa de interés del 3.5% mensual y lo capitaliza diariamente. Si usted tiene una deuda de Q5,000 y que han pasado 50 días desde la fecha en que se realizó la compra, calcule los intereses que debe pagar por la compra. (Utilice 30 días para cada mes).