5.1 Funciones inversas

OBJETIVOS

- Determinar si una función es biunívoca usando la prueba de la recta horizontal.
- Determinar si una función es inversa de otra utilizando la definición de función inversa.
- Encontrar la función inversa de una función en casos sencillos.
- Dibujar la representación gráfica de una función y su función inversa.

Función uno a uno o biunívoca

El concepto de función biunívoca o uno a uno es necesario en el estudio de las funciones inversas ya que solo las funciones biunívocas tienen función inversa.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN UNO A UNO

Una función f con dominio D y rango R es una función **uno a uno** o **biunívoca** si satisface la condición siguiente:

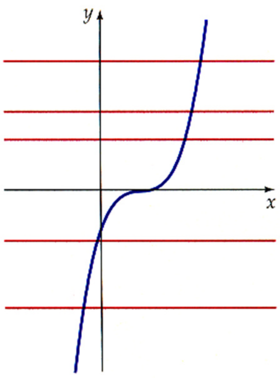
Si $a \neq b$ en D entonces $f(a) \neq f(b)$ en R.

Es decir que elementos distintos en el dominio deben tener imágenes distintas en el Rango. Una forma simple para determinar si una función es uno a uno consiste en utilizar la prueba siguiente

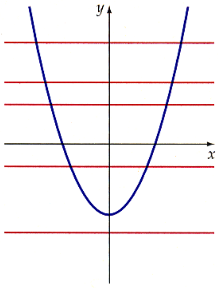
PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Si toda recta horizontal intercepta la gráfica de una función en no más de un punto, entonces la función es uno a uno.

La figura siguiente muestra la gráfica de una función uno a uno pues cualquier recta horizontal corta la gráfica sólo en un punto



Mientras que la figura que sigue muestra la gráfica de una función que no es uno a uno pues hay al menos una recta horizontal que la intercepta en más de un punto



Ejemplo 1: Determinando si una función es uno a uno

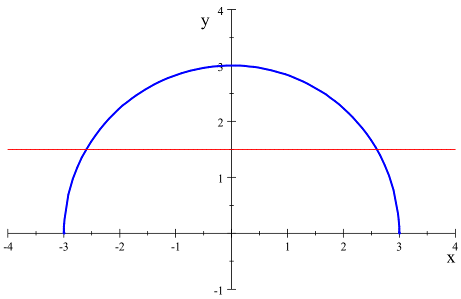
Utilice la gráfica de la función para determinar si la función es uno a uno

a. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

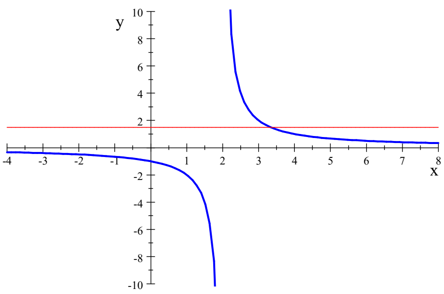
b. $g(x) = \dfrac{2}{x - 2}$

Solución

a. La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es la mitad de una circunferencia con centro en el origen y radio 3. La figura muestra que una recta horizontal intercepta la gráfica en dos puntos, por lo tanto la función no es uno a uno.



b. La función $g(x) = \dfrac{2}{x - 2}$ es una función racional, estas funciones se estudian en un tema posterior del curso. Por el momento la gráfica se puede construir por medio de una tabla de valores o bien utilizando un programa de cómputo. Puede observarse que cualquier recta horizontal la intercepta solamente en un punto, por lo tanto la función es biunívoca.



Función inversa

En esta sección se presenta la definición de función inversa, así como algunos ejemplos sobre el cálculo de las mismas

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA

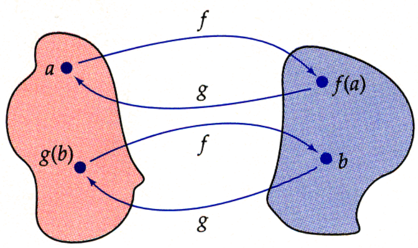
Si f es una función uno a uno cono dominio D y rango R, y g es una función con dominio R y rango D. La función g es la **función inversa** de f si y solo si

$$f(g(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } g$$

$$g(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } f$$

La función inversa de la función f se representa como f^{-1}

Es decir que la función inversa revierte las operaciones que la función efectúa sobre un número x como se ilustra en el diagrama siguiente



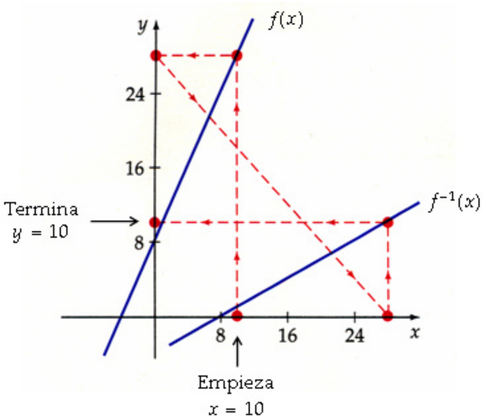
Al aplicar la función f al número a se obtiene como resultado $f(a)$, luego al aplicar la función g a $f(a)$ se obtiene $g(f(a)) = a$. De la misma forma al aplicar la función g a un número b se obtiene $g(b)$ y luego al aplicar la función f a $g(b)$ se obtiene $f(g(b)) = b$

Por ejemplo si $f(x) = 2x + 8$ su función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 4$. La gráfica siguiente ilustra como opera la función inversa para $x = 10$

$$f(10) = 2(10) + 8 = 20 + 8 = 28$$

Ahora 28 toma el valor de x en la función inversa y se tiene

$$f^{-1}(28) = \frac{1}{2}(28) - 4 = 14 - 4 = 10$$



Ejemplo 2: Prueba de que dos funciones son inversas entre sí

Utilice la definición de función inversa para probar que las funciones $f(x)=\dfrac{2x}{x+4}$ y $g(x)=\dfrac{4x}{2-x}$ son funciones inversas

Solución

La definición establece que dos funciones son inversas si $f(g(x))=g(f(x))=x$

Efectuando los cálculos se tiene

$$f(g(x))=f\left(\frac{4x}{2-x}\right)=\frac{2\left(\frac{4x}{2-x}\right)}{\left(\frac{4x}{2-x}\right)+4}=\frac{\frac{8x}{2-x}}{\frac{4x+4(2-x)}{2-x}}=\frac{\frac{8x}{2-x}}{\frac{8}{2-x}}=\frac{8x(2-x)}{8(2-x)}=x$$

$$g(f(x))=g\left(\frac{2x}{x+4}\right)=\frac{4\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{2-\left(\frac{2x}{x+4}\right)}=\frac{\frac{8x}{x+4}}{\frac{2(x+4)-2x}{x+4}}=\frac{\frac{8x}{x+4}}{\frac{8}{x+4}}=\frac{8x(x+4)}{8(x+4)}=x$$

Como en ambos casos el resultado es igual a x, se concluye que f y g son funciones inversas una de la otra.

En el cuadro siguiente se presenta el procedimiento para calcular la inversa de una función en los casos donde es posible despejar x en términos de y.

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER UNA FUNCIÓN INVERSA

1. Compruebe que f es una función uno a uno en todo su dominio.
2. Despeje x en la ecuación $y=f(x)$ para obtener una expresión para la función inversa $x=f^{-1}(y)$.
3. Escriba la fórmula para la función inversa $y=f^{-1}(x)$.
4. Verifique que el dominio de f es el rango de f^{-1} y que el rango de f es el dominio de f^{-1}
5. Verifique que se satisfacen las condiciones

   $f(g(x))=x$ para toda x en el dominio de g

   $g(f(x))=x$ para toda x en el dominio de f

Ejemplo 3: Obteniendo la inversa de una función

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

a. Dibuje la representación gráfica e indique si la función es uno a uno.

b. Determine el dominio y el rango de f.

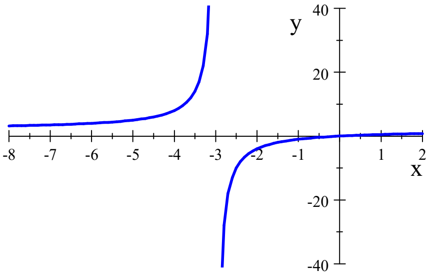
c. Encuentre la función inversa f^{-1}, indicando su dominio y su rango.

d. Verifique que $f(f^{-1}(x))=x=f^{-1}(f(x))$

e. Dibuje la gráfica de f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas

Solución

a. La figura siguiente muestra la gráfica de *f*. La función es uno a uno ya que cualquier recta horizontal la intercepta solamente una vez



b. El dominio de f está formado por todos los números en el intervalo $(-\infty,-3) \cup (-3,\infty)$ ya que $x = -3$ hace que el denominador sea igual a cero. El rango de *f* es el dominio de la función inversa y se obtendrá cuando se calcule la función inversa.

c. Para obtener la fórmula de la función inversa se despeja *x* en la ecuación $y = f(x)$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2x}{x+3} \\
y(x+3) &= 2x \\
yx - 2x &= -3y \\
x(y-2) &= -3y \\
x &= \frac{-3y}{y-2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{-3x}{x-2}$

El dominio de f^{-1} es el conjunto de todos los números en el intervalo $(-\infty,2) \cup (2,\infty)$ ya que $x = 2$ hace que el denominador sea cero.

Entonces el dominio de f^{-1} es el intervalo $(-\infty,2) \cup (2,\infty)$ y el rango es el intervalo $(-\infty,-3) \cup (-3,\infty)$ que es el dominio de *f*, obtenido en el inciso anterior.

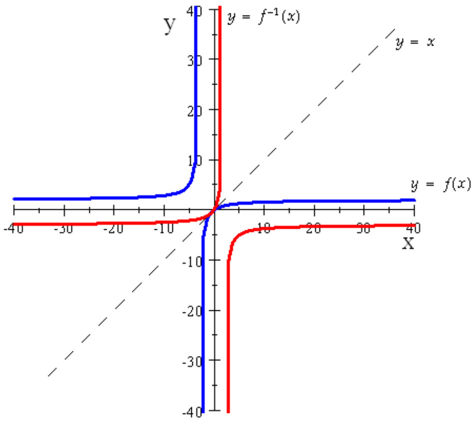
d. Desarrollando la composición de funciones se tiene

$$
f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-3x}{x-2}\right) = \frac{2\left(\dfrac{-3x}{x-2}\right)}{\left(\dfrac{-3x}{x-2}\right)+3} = \frac{\dfrac{-6x}{x-2}}{\dfrac{-3x+3(x-2)}{x-2}} = \frac{\dfrac{-6x}{x-2}}{\dfrac{-6}{x-2}} = \frac{-6x(x-2)}{(x-2)(-6)} = x
$$

$$
f^{-1}(f(x)) = f\left(\frac{2x}{x+3}\right) = \frac{-3\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)}{\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)-2} = \frac{\dfrac{-6x}{x+3}}{\dfrac{2x-2(x+3)}{x-2}} = \frac{\dfrac{-6x}{x+3}}{\dfrac{-6}{x+3}} = \frac{-6x(x+3)}{(x+3)(-6)} = x
$$

Lo que prueba que la función f^{-1} es la inversa de la función *f*

e. La gráfica de la función f se muestra en color azul y la de f^{-1} en color rojo, han sido construidas con el programa Scientific Notebook. Observe la simetría de la función y su inversa con respecto a la recta $y = x$



Ejemplo 4: Obteniendo la inversa de una función

Dada la función $f(x) = x^2 + 4x - 2$

a. Dibuje la representación gráfica e indique si la función es biunívoca.

b. Determine el dominio y el rango de *f*.

c. Encuentre la función inversa f^{-1}, restringiendo el dominio de *f* si es necesario.

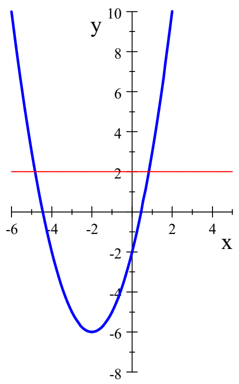
d. Indique el dominio y el rango de f^{-1}

e. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$

f. Dibuje la gráfica de f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas.

Solución

a. La figura siguiente muestra la gráfica de *f*, que es una parábola vertical. La función no es uno a uno ya que hay rectas horizontales que la interceptan en dos puntos



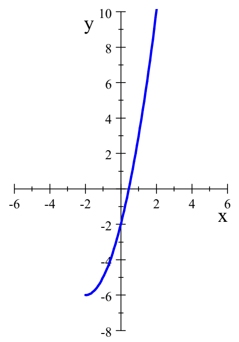
b. El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales. Para encontrar el rango se debe localizar el vértice de la parábola, lo cual se hará completando cuadrados

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x - 2 \\ &= (x^2 + 4x + 4) - 2 - 4 \\ &= (x + 2)^2 - 6 \end{aligned}$$

Obteniendo que el vértice está en el punto $(h,k) = (-2,-6)$. A partir del vértice se tiene que el rango de la función está formado por todos los números en el intervalo $[-6,\infty)$.

c. Como *f* no es una función uno a uno, es necesario restringir el dominio para que si lo sea. Restringiendo el dominio al intervalo $[-2,\infty)$, en el cual la función es creciente, se obtiene una función uno a uno.

La figura siguiente muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x - 2$ con dominio $[-2,\infty)$ y rango $[-6,\infty)$



Para encontrar la función inversa se despeja *x* en la ecuación $y = f(x)$

$$y = (x+2)^2 - 6$$

$$y + 6 = (x+2)^2$$

$$\pm\sqrt{y+6} = x + 2$$

$$\pm\sqrt{y+6} - 2 = x$$

Observe que se han obtenido dos fórmulas para *x*, $x = \sqrt{y+6} - 2$ y $x = -\sqrt{y+6} - 2$.

La que corresponde a la restricción que se ha realizado es la primera, ya que $x \geq -2$.

Por lo tanto la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x+6} - 2$

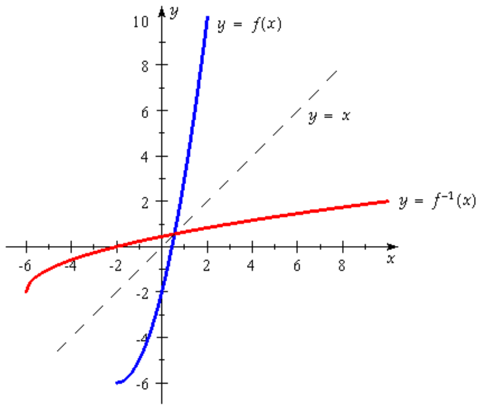
d. El dominio de f^{-1} es el rango de *f*, es decir el intervalo $[-6,\infty)$, el Rango de f^{-1} es el dominio de *f*, es decir el intervalo $[-2,\infty)$.

e. Utilizando la composición para comprobar que son funciones inversas se tiene

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt{x+6} - 2\right) = \left((\sqrt{x+6} - 2) + 2\right)^2 - 6 = \left(\sqrt{x+6}\right)^2 - 6 = x + 6 - 6 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left((x+2)^2 - 6\right) = \sqrt{\left((x+2)^2 - 6\right) + 6} - 2 = \sqrt{(x+2)^2} - 2 = x + 2 - 2 = x$$

f. La siguiente figura muestra la gráfica de *f* en color azul y la de f^{-1} en color rojo. Al igual que en el ejemplo anterior se observa la simetría de ambas funciones con respecto a la recta $y = x$



Ejercicios de la sección 5.1

En los ejercicios 1 a 5 verifique si f y g son funciones inversas mostrando que $(f \circ g)(x) = x$ y que $(g \circ f)(x) = x$.

1. $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = \dfrac{x+5}{3}$

2. $f(x) = -2x + 1$, $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$

4. $f(x) = \dfrac{2x}{3x-1}$, $g(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

5. $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$

En los ejercicios 6 a 10 encuentre una expresión en términos de x, para la función inversa de la función dada

6. $F(x) = 4x - 1$

7. $F(v) = 1 - v^3$

8. $M(t) = \dfrac{5-t}{t}$

9. $f(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$

10. $g(x) = \sqrt{4-x} + 2$

En los ejercicios 11 a 30

a. Dibuje la gráfica de la función dada.

b. Determine si la función es uno a uno, si no lo es restrinja el dominio para que lo sea.

c. Encuentre el dominio y el rango de la función uno a uno.

d. Encuentre la función inversa, su dominio y rango.

e. Verifique que las funciones una inversas una de la otra.

f. Dibuje la representación gráfica de f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas.

11. $f(x) = 4x + 1$

12. $f(x) = -\dfrac{2}{3}x - 3$

13. $f(x) = 1 - x^3$

14. $f(x) = 2x^3 + 5$

15. $f(x) = 3x^2 - 4$

16. $f(x) = 9 - x^2$

17. $F(x) = \dfrac{1}{x+4}$

18. $F(x) = x^2 - 4x + 1$

19. $f(x) = 2x^2 + 6x$

20. $F(x) = 4x - 2x^2 + 4$

21. $F(x) = \sqrt{x-3}$

22. $f(x) = 4 - \sqrt{x}$

23. $f(x) = -\sqrt{x-3} + 5$

24. $F(x) = \sqrt{4-x^2}$

25. $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$

26. $f(x) = |x| - 2$

27. $F(x) = |x + 3|$

28. $F(x) = |x| + x$

29. $F(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

30. $F(x) = \dfrac{2-x}{x+2}$