PROBLEMA RESUELTO 5

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a. Calcule: (i) $f(-5)$, (ii) $f(2)$, (iii) $f(2+h)$, $h > 0$

b. Dibuje la gráfica de la función

Solución

a. Para evaluar una función definida por varias fórmulas hay que tener cuidado de elegir la fórmula apropiada ya que un número solo puede ser evaluado en una fórmula.

(i) Como $x = -5$ está en el intervalo $(-\infty, -2]$ que es el dominio de la primera fórmula.

$$f(-5) = -1$$

(ii) Ya que $x = 2$ se encuentra en el intervalo $(-2, 2]$ que es el dominio de la segunda fórmula.

$$f(2) = \sqrt{4 - (2)^2} = 0$$

(iii) El número $2 + h$ es mayor que 2 pues h es positivo, por lo tanto está en el intervalo $(2, \infty)$ que es el dominio de la tercera fórmula y es ahí donde debe evaluarse, entonces

$$f(2+h) = (2+h) - 1 = 1 + h$$

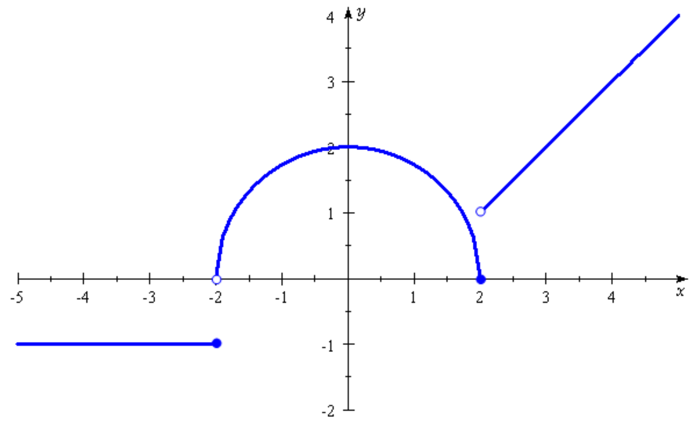
b. Para dibujar la gráfica de una función con varias fórmulas se utilizan los conceptos de transformaciones de las gráficas desarrollados en esta sección, tomando en cuenta que a cada parte del dominio le corresponde una gráfica diferente.

En este ejemplo, la gráfica de $y = -1$ es una recta horizontal que se dibuja en el intervalo $(-\infty, -2]$, como el intervalo es cerrado en el lado derecho esta parte de la gráfica se representa con un punto sólido en el extremo derecho.

En el intervalo $(-2, 2]$ se dibuja la gráfica $y = \sqrt{4 - x^2}$ que es la mitad superior de una circunferencia de radio 2 con centro en el origen. El extremo derecho se dibuja con un punto vacío ya que el intervalo es abierto en ese lado y en el lado derecho se utiliza un punto sólido ya que el intervalo es cerrado en 2.

En el intervalo $(2, \infty)$ se dibuja la gráfica $y = x - 1$, con un punto vacío en el lado izquierdo que corresponde al intervalo abierto en 2.

La figura siguiente muestra la gráfica resultante


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4