PROBLEMA RESUELTO 5

Obtenga el polinomio con coeficientes reales de grado 6 sabiendo -2 es un cero de multiplicidad 2, que tiene dos ceros complejos $3i$ y $3-5i$. Además, se sabe que el polinomio pasa por el punto $(1,-3)$

Solución

Si $x=-2$ es un cero de multiplicidad 2 entonces el polinomio tiene como factor

$$(x+2)^2$$

Como el polinomio buscado tiene coeficientes reales si $x=3i$ es un cero complejo, su conjugado $x=-3i$ también es un cero del polinomio, por lo que otros dos factores del polinomio son

$$\begin{aligned}(x-3i)(x-(-3i)) &= (x-3i)(x+3i)\\ &= x^2-9i^2\\ &= x^2-9(-1)=x^2+9\end{aligned}$$

Si $x=3-5i$ es otro cero complejo su conjugado $x=3+5i$ también será un cero, de donde se obtienen los otros dos factores

$$\begin{aligned}(x-(3-5i))(x-(3+5i)) &= (x-3+5i)(x-3-5i)\\ &= x^2-3x-5ix-3x+9+15i+5xi-15i-25i^2\\ &= x^2-6x+9-25(-1)\\ &= x^2-6x+34\end{aligned}$$

El polinomio de grado 6 será el producto de los factores siguientes

$$P(x)=k(x+2)^2(x^2+9)(x^2-6x+34)$$

Finalmente, para determinar la constante k utilizamos el hecho de que el polinomio pasa por el punto $(1,-3)$. Sustituimos $P(1)=-3$ y despejamos k

$$\begin{aligned}-3 &= k(1+2)^2(1^2+9)(1^2-6(1)+34)\\ -3 &= k(9)(10)(29)\\ k &= \frac{-3}{2610}=-\frac{1}{870}\end{aligned}$$

El polinomio buscado es

$$P(x)=-\frac{1}{870}(x+2)^2(x^2+9)(x^2-6x+34)$$