

PROBLEMA RESUELTO 5

Resuelva la ecuación logarítmica

$$\log 2x - \log(x - 3) = 1$$

Solución

El procedimiento que usualmente permite resolver una ecuación logarítmica consiste en expresar ambos lados de la ecuación como un solo logaritmo; para lograr esto se utilizan las propiedades de los logaritmos. Para la ecuación de este ejemplo se tiene que el lado izquierdo puede expresarse como el logaritmo de un cociente y para el lado derecho se puede usar la propiedad: $\log_a a^x = x$, que expresada en base 10 nos da $\log 10^1 = 1$

$$\begin{aligned}\log 2x - \log(x - 3) &= 1 \\ \log\left(\frac{2x}{x - 3}\right) &= \log 10^1\end{aligned}$$

Como ambos lados de la ecuación tienen logaritmo, éste puede cancelarse utilizando la propiedad: $\log_a M = \log_a N$ entonces $M = N$. Al eliminar los logaritmos, se obtiene una ecuación algebraica, de la cual, algunas de sus soluciones son las soluciones de la ecuación logarítmica. La ecuación sin logaritmos es

$$\frac{2x}{x - 3} = 10^1$$

Despejando x se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x - 3} &= 10 \\ 2x &= 10(x - 3) \\ 2x &= 10x - 30 \\ 2x - 10x &= -30 \\ -8x &= -30 \\ x &= \frac{-30}{-8} = \frac{15}{4}\end{aligned}$$

Sustituyendo $x = \frac{15}{4}$, en la ecuación dada para verificar la respuesta se tiene

$$\begin{aligned}\log\left(2 \times \frac{15}{4}\right) - \log\left(\frac{15}{4} - 3\right) &= 1 \\ \log\left(\frac{15}{2}\right) - \log\left(\frac{3}{4}\right) &= 1 \\ 0.87506 - (-0.12493) &= 1 \\ 0.99999 &\approx 1\end{aligned}$$

Lo cual comprueba que $x = \frac{15}{4}$ es solución de la ecuación.
