4.5 Funciones racionales

OBJETIVOS

- Encontrar las asíntotas verticales de una función racional.
- Encontrar las asíntotas horizontales de una función racional.
- Dibujar la representación gráfica de una función racional.

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, entonces la función F definida por

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

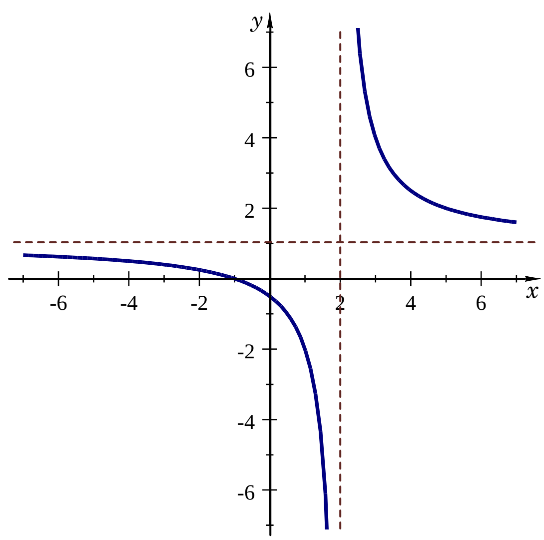
es llamada **función racional.** El dominio de F es el conjunto de todos los números reales, excepto aquellos números que hacen que $Q(x) = 0$. Por ejemplo el dominio de la función racional

$$F(x) = \frac{x^2 + 2x}{x(x-2)(2x+3)}$$

es el conjunto de todos los números reales excepto $0,\ 2,\ y\ -\frac{3}{2}$.

Para explicar el trazo de la representación gráfica de una función racional, lo haremos por medio de un ejemplo, por medio del cual se irán presentando algunas definiciones.

La gráfica de la función racional $F(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ se muestra en la siguiente figura



Observe que la gráfica toma valores negativos muy grandes cuando x tiene valores muy cercanos a dos, pero menores que dos. Como puede observarse en la siguiente tabla de valores.

x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999
y	-29	-59	-299	-599	-2999

De la tabla de valores y de la gráfica se observa que cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, los valores de $F(x)$ toman valores negativos cada vez más grandes. Matemáticamente esto se dice en la forma siguiente:

Cuando x tiende a 2 por la izquierda, $F(x)$ tiende a $-\infty$

Y simbólicamente se escribe

$$F(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 2^-$$

Ahora observe que la gráfica toma valores positivos muy grandes cuando x tiene valores muy cercanos a dos, pero mayores que dos. Como puede observarse en la siguiente tabla de valores.

x	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001
y	31	61	301	601	3001

De la tabla de valores y de la gráfica se observa que cuando x se aproxima a 2 por la derecha, los valores de $F(x)$ toman valores positivos cada vez más grandes. Matemáticamente esto se dice en la forma siguiente:

Cuando x tiende a 2 por la derecha, $F(x)$ tiende a $+\infty$

Y simbólicamente se escribe

$$F(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to 2^+$$

Ahora considere los valores de $F(x)$ cuando x toma valores muy grandes, como se muestra en la siguiente tabla.

x	1000	5000	10,000	50,000	100,000
y	1.00301	1.00060	1.00030	1.00006	1.00003

La tabla y la gráfica sugieren que los valores de $F(x)$ se aproximan a 1 cuando los valores de x crecen sin límite. Matemáticamente esto se expresa de la forma siguiente:

Cuando x tiende a infinito, $F(x)$ tiende a 1

Y simbólicamente se escribe como

$$F(x) \to 1 \text{ cuando } x \to +\infty$$

Finalmente considere los valores de $F(x)$ cuando x toma valores muy grandes negativos, como se muestra en la siguiente tabla.

x	−1000	−5000	−10,000	−50,000	−100,000
y	0.997006	0.999400	0.999706	0.999940	0.999970

La tabla y la gráfica sugieren que los valores de $F(x)$ se aproximan a 1 cuando los valores de x decrecen sin límite. Matemáticamente esto se expresa de la forma siguiente:

Cuando x tiende a menos infinito, $F(x)$ tiende a 1

Y simbólicamente se escribe como

$$F(x) \to 1 \text{ cuando } x \to -\infty$$

Ahora que ya se ha introducido la notación apropiada, para expresar el comportamiento de las funciones racionales se pueden introducir formalmente las definiciones y los teoremas necesarios para dibujar la gráfica de una función racional

Asíntota vertical

El cuadro siguiente presenta la definición de asíntota vertical

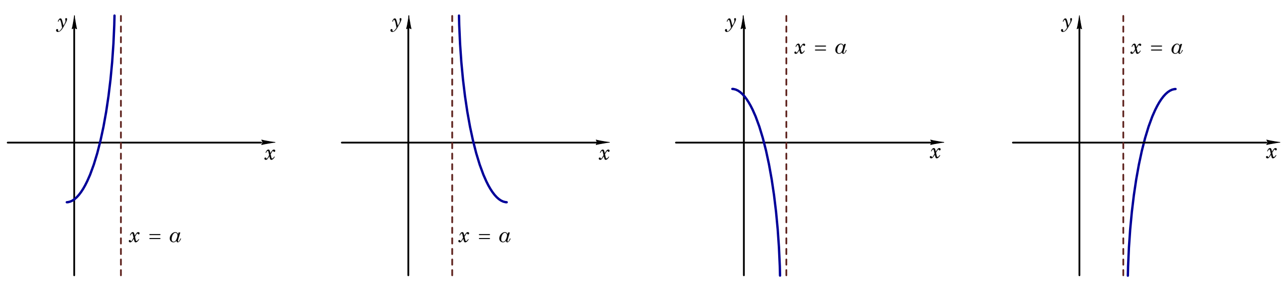
Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función F si

$$F(x) \to +\infty \qquad \text{o} \qquad F(x) \to -\infty$$

Cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha.

Las cuatro gráficas siguientes muestran los cuatro comportamientos posibles de una función cuando $x = a$ es una asíntota vertical y los valores de x están muy cercanos a $x = a$



$F(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$

$F(x) \to \infty$ cuando $x \to a^+$

$F(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^-$

$F(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$

Geométricamente una recta es una asíntota vertical a una curva si la distancia entre un punto P de la curva y la asíntota se aproxima acero cuando el punto el punto P se aleja del origen del sistema de coordenadas. Las asíntotas verticales de una función racional se pueden obtener con el siguiente teorema

Teorema de las asíntotas verticales

Si $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, donde $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes y $(x - a)$ es un factor del denominador $Q(x)$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $F(x)$.

Ejemplo 1: Asíntotas verticales de una función

Encuentre las asíntotas verticales de las funciones siguientes

a. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 8}$ **b.** $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

Solución

a. Al factorizar el denominador de la función se obtiene

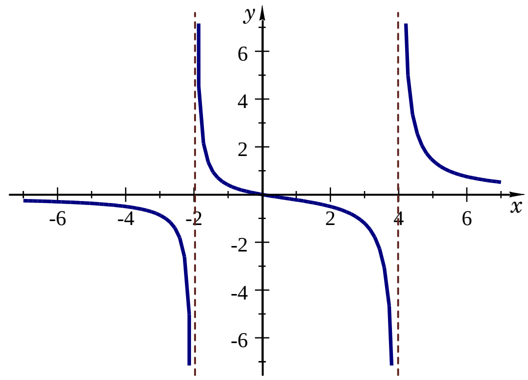
$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 2x - 8} = \frac{2x}{(x-4)(x+2)}$$

La función racional anterior no tiene factores comunes al numerador y denominador. Los ceros del denominador son

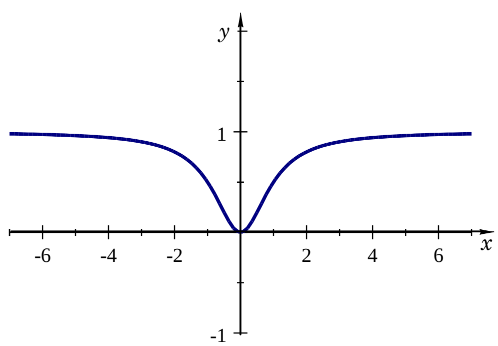
$$x = 4 \text{ y } x = -2$$

Por lo tanto las asíntotas verticales son las rectas $x = 4$ y $x = -2$.

Aunque el trazo de la gráfica será discutido más adelante, en la siguiente figura se muestra la gráfica de la función anterior.



b. El denominador de la función racional $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$ no tiene ceros reales, ya que las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ son ambas números complejos. Concluimos que la función no tiene asíntotas verticales. La representación gráfica de la función g se muestra en la figura siguiente



Asíntota horizontal

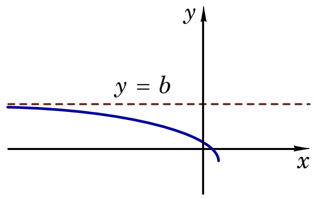
Geométricamente la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de una curva, si la distancia entre un punto P de la curva y la recta, se aproxima a cero cuando el punto P se aleja del origen. La definición formal se presenta en el cuadro siguiente

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA HORIZONTAL

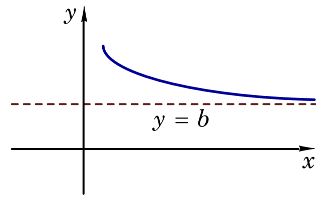
La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función F si

$$F(x) \to b \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \ \text{ o } \ x \to -\infty$$

En la figura siguiente se lustran algunas posibles formas de la gráfica de una función racional cuando está cerca de una asíntota horizontal



$f(x) \to b$ cuando $x \to -\infty$



$f(x) \to b$ cuando $x \to \infty$

Para calcular las asíntotas horizontales se utiliza el siguiente teorema

TEOREMA DE LAS ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Si $\quad F(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$

es una función racional con numerador de grado n y denominador de grado m.

1. Si $n < m$, entonces el eje x es la asíntota horizontal de la gráfica de F.

2. Si $n = m$, entonces la recta $y = \dfrac{a_n}{b_m}$ es la asíntota horizontal de la gráfica de F.

3. Si $n > m$, entonces la gráfica de F no tiene asíntota horizontal.

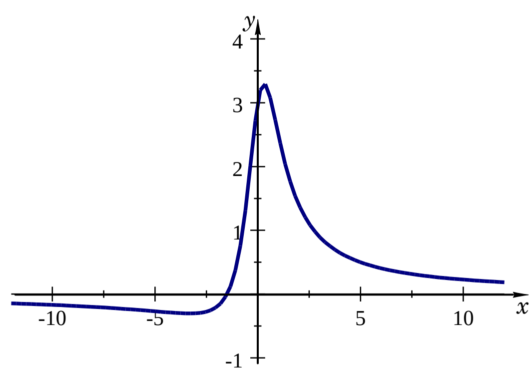
Ejemplo 2: Asíntotas horizontales

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de las funciones siguientes

a. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$ **b.** $g(x) = \dfrac{4x^2+1}{3x^2}$ **c.** $h(x) = \dfrac{x^3+1}{x-2}$

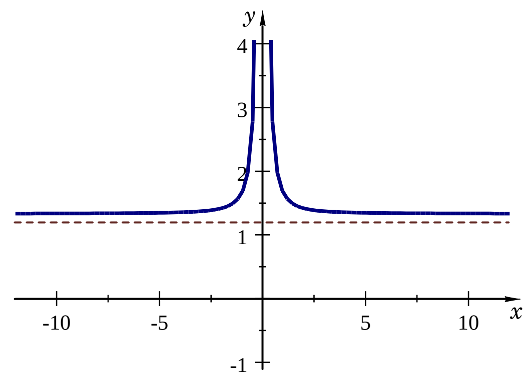
Solución

a. En la función $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$ el grado del numerador es $n = 1$, mientras que el grado del denominador es $m = 2$. Como $n < m$, la gráfica de la función tiene como asíntota horizontal el eje x. En la figura se ilustra la gráfica de la función

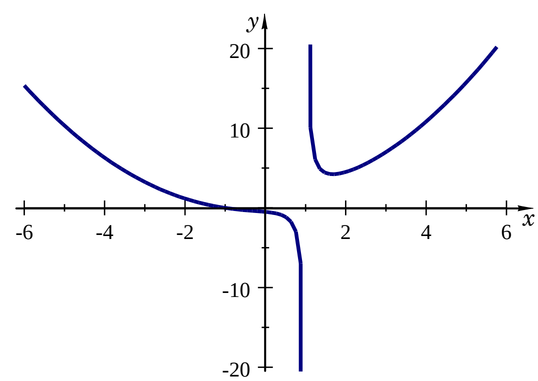


.

b. En la función $g(x)=\dfrac{4x^2+1}{3x^2}$ el grado del numerador es $n=2$, mientras que el grado del denominador es $m=2$. Como $n=m$, la recta $y=\dfrac{a_n}{b_m}=\dfrac{4}{3}$, es la asíntota horizontal de la gráfica de la función racional. En la figura se ilustra la gráfica de la función.



c. En la función $h(x)=\dfrac{x^3+1}{x-2}$ el grado del numerador es $n=3$, mientras que el grado del denominador es $m=1$. Como $n>m$, la gráfica de la función no tiene asíntota horizontal. En figura se ilustra la gráfica de la función.



Propiedad del signo de una función racional

Ya para concluir el estudio de las funciones racionales y poder así dibujar su representación gráfica es necesario conocer si la gráfica está por arriba del eje x o bien por debajo del eje x. La siguiente propiedad permite establecer el signo de una función racional.

PROPIEDAD DEL SIGNO DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Los cerros y las asíntotas verticales de una función racional F, dividen al eje x en intervalos tales que

1. $F(x)$ es positiva para todo x en un intervalo, o
2. $F(x)$ es negativa para todo x en un intervalo.

Por ejemplo la función racional

$$F(x)=\frac{x-1}{(x+3)(x-4)}$$

Tiene como asíntotas verticales las rectas $x=-3$ y $x=4$, además tiene como cero $x=1$ (el cero se obtiene al igualar a cero el numerador). Estos números dividen al eje x en los intervalos siguientes

$$(-\infty,-3),\quad (-3,1),\quad (1,4),\quad (1,\infty)$$

En cada uno de estos intervalos la función solamente puede tener un signo, positivo o negativo; pero no ambos. Por lo que en cada intervalo la gráfica de la función estará arriba o abajo del eje x.

Procedimiento para dibujar una función racional

Si $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios que no tienen factores comunes, entonces el siguiente procedimiento es una guía para dibujar la representación gráfica de la función

PROCEDIMIENTO PARA DIBUJAR UNA FUNCIÓN RACIONAL

1. **Interceptos.** Encuentre los ceros del numerador resolviendo la ecuación $P(x) = 0$. Para cada cero a, dibuje el punto $(a, 0)$. Encuentre el intercepto con el eje y evaluando la función en $x = 0$. Dibuje el intercepto $(0, b)$ con el eje y.
2. **Asíntotas verticales**. Encuentre los ceros del denominador resolviendo la ecuación $Q(x) = 0$. Para cada cero a del denominador la recta $x = a$ es una asíntota vertical. Dibuje las asíntotas verticales.
3. **Asíntotas horizontales.** Utilice el teorema de las asíntotas horizontales para encontrar las asíntotas horizontales. Dibuje las asíntotas horizontales.
4. **Intervalos.** Con los ceros del numerador y las asíntotas verticales divida al eje x en intervalos abiertos. Evalúe al menos un valor de x en cada intervalo y dibuje cada uno de los puntos obtenidos.
5. **Gráfica.** Dibuje la gráfica de la función de izquierda a derecha, tomando en cuenta lo siguiente:
   - Debe pasar por cada uno de los puntos que se han dibujado.
   - La distancia entre la gráfica y una asíntota se aproxima a cero cuando la gráfica se aleje del origen.
   - En cada intervalo la gráfica está arriba del eje x o abajo del eje x.

Ejemplo 3: Gráfica de una función racional

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales, interceptos con los ejes de coordenadas y dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + x - 3}$$

Solución

Para comenzar a resolver el problema, es mejor factorizar el numerador y el denominador, para ésta función racional se tiene

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + x - 3} = \frac{(x-2)(x+2)}{(2x+3)(x-1)}$$

Observe que la función racional no tiene factores comunes al numerador y al denominador, por lo que podemos realizar el análisis sin ningún problema.

a. Interceptos

Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, primero se encontraran los interceptos con los ejes de coordenadas. Para encontrar los interceptos con el eje x se iguala el numerador a cero, es decir

$$(x+2)(x-2)=0$$

$$x=-2, \quad x=2$$

Por lo tanto la gráfica corta al eje x en los puntos $(-2,0)$ y $(2,0)$

Para encontrar el intercepto con el eje y se sustituye $x=0$ y se obtiene el valor de y

$$f(0)=\frac{(0)^2-4}{2(0)^2+(0)-3}=\frac{4}{3}$$

Entonces la gráfica intercepta al eje y en el punto $\left(0,\frac{4}{3}\right)$

b. Asíntotas verticales

Para las asíntotas verticales encontramos los ceros del denominador

$$(2x+3)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{3}{2}, \quad x=1$$

Las asíntotas verticales de la función son las rectas $x=-\frac{3}{2}$ y $x=1$

c. Asíntota horizontal

Como el grado del denominador es igual al grado del denominador, es decir $n=m$, entonces la recta $y=\frac{a_n}{b_m}=\frac{1}{2}$ es la asíntota horizontal.

d. Intervalos

Los interceptos con el eje x y las asíntotas verticales dividen al eje x en los siguientes intervalos

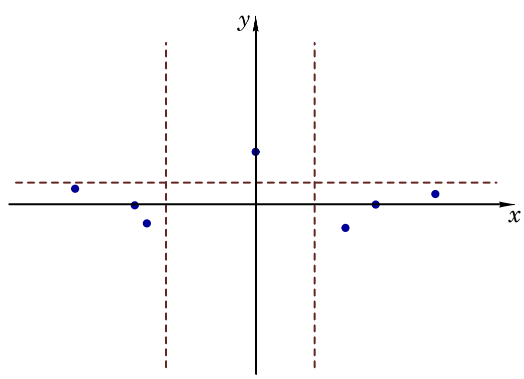
$$(-\infty.-2), \quad \left(-2,-\frac{3}{2}\right), \quad \left(-\frac{3}{2},1\right), \quad (1,2), \quad (2,\infty)$$

Evaluando un valor de x en cada intervalo se obtiene la siguiente tabla de valores

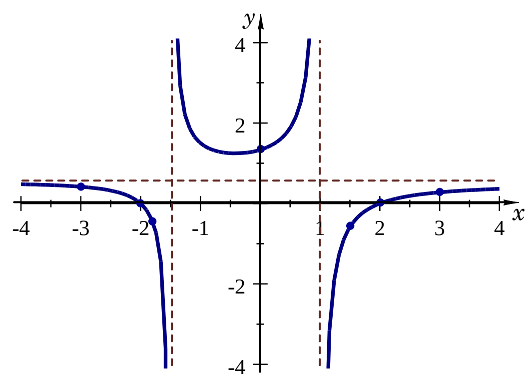
x	−3	−1.8	0	1.5	3
y	0.417	−0.452	1.333	−0.583	0.278

e. Dibujo de la gráfica

Para dibujar la representación gráfica primero trace las asíntotas horizontales y verticales, los interceptos con los ejes de coordenadas y los puntos de la tabla de valores; como se muestra en la siguiente figura



Ahora trace una curva de izquierda a derecha en cada intervalo, tomando en cuenta que en cada uno de ellos la curva es positiva o es negativa, debe pasar por los puntos que se han dibujado y cuando la curva se aleja del origen se acerca a la asíntota. Si tiene dudas puede dibujar algunos puntos adicionales. El resultado es la gráfica siguiente



Ejercicios de la sección 4.5

En los ejercicios 1 a 5 encuentre las asíntotas verticales de cada función racional.

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+3x}$

2. $F(x) = \dfrac{3x^2+5}{x^2-4}$

3. $F(x) = \dfrac{x^2+2}{6x^2-5x-4}$

4. $F(x) = \dfrac{x^2}{x^3-8}$

5. $F(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

En los ejercicios 6 a 10 encuentre las asíntotas horizontales de la función racional.

6. $F(x) = \dfrac{4x^2-x-6}{x^2-9}$

7. $F(x) = \dfrac{x^2}{x^3-8}$

8. $F(x) = \dfrac{x^4+2}{6x^2-5x-4}$

9. $F(x) = \dfrac{x^2+5}{3x^2-4}$

10. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+3x}$

En los ejercicios 11 a 30 encuentre las asíntotas verticales, asíntotas horizontales, interceptos con los ejes de coordenadas y dibuje la gráfica de la función racional.

11. $F(x) = \dfrac{4}{x-4}$

12. $F(x) = \dfrac{x}{x+2}$

13. $F(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

14. $F(x) = \dfrac{x^2+1}{4-x^2}$

15. $F(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$

16. $F(x) = \dfrac{x}{x^2-2x-8}$

17. $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4x+4}$

18. $F(x) = \dfrac{x^3}{x^2-6x+9}$

19. $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2-6x}$

20. $F(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

21. $F(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x^2+2x-1}$

22. $F(x) = \dfrac{2x^2-18}{x^2-6x+5}$

23. $F(x) = \dfrac{x^2+x}{3x^2+x-2}$

24. $F(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2}{2x + 4}$

25. $F(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 8}$

26. $F(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - x - 3}$

27. $F(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 2x + 1}$

28. $F(x) = \dfrac{-2x^3 + 6x}{2x^2 - 6x}$

29. $F(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

30. $F(x) = \dfrac{2x^3 + x + 1}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}$