4.4 Teorema fundamental del Álgebra

OBJETIVOS

- Encontrar los ceros complejos de una función polinomial.
- Encontrar los ceros de una función polinomial dados algunos de sus ceros.
- Construir una función polinomial dados algunos de sus ceros y uno de sus puntos.

El matemático Aleman Carl Friedrich Gauss (1777−1855) fue el primero en proponer que todo polinomio tiene al menos un cero complejo. Este teorema básico en el estudio del álgebra es llamado **Teorema fundamental del Álgebra**. Para el uso de éste teorema es importante tener claro que los términos coeficientes complejos y ceros complejos incluyen a nos coeficientes reales y ceros reales, ya que el conjunto de los números reales está incluido en el conjunto de los números complejos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos, entonces $P(x)$ tiene por lo menos un cero complejo.

A partir del teorema fundamental del álgebra se puede hacer el siguiente razonamiento. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos de grado $n \geq 1$, tiene al menos un cero complejo c_1. Utilizando el teorema del factor para factorizar el polinomio se tiene

$$P(x) = (x - c_1)P_1(x)$$

donde $P_1(x)$ es el polinomio reducido que tiene grado $n - 1$. Si el grado de $P_1(x)$ es mayor que 1, se puede aplicar nuevamente el teorema fundamental del Álgebra y establecer que $P_1(x)$ tiene al menos un cero complejo c_2. Continuando con éste razonamiento se obtiene el siguiente teorema que es consecuencia del teorema fundamental del Álgebra

NÚMERO DE CEROS DE UN POLINOMIO

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos, entonces $P(x)$ tiene exactamente n ceros complejos, en donde cada cero de multiplicidad k es contado k veces.

El siguiente teorema es útil para encontrar los ceros de un polinomio con coeficientes reales, pues establece como los ceros complejos siempre se presentan con su conjugado.

EL TEOREMA DE LOS CEROS COMPLEJOS CONJUGADOS

Si $a + bi\ (b \neq 0)$ es un cero complejo del polinomio con coeficientes reales $P(x)$, entonces su conjugado $a - bi$ también es un cero complejo de $P(x)$

Ejemplo 1: Utilizando el par conjugado para encontrar los otros ceros

Encuentre todos los ceros del polinomio sabiendo que $2+i$ es un cero del polinomio

$$x^4-4x^3+14x^2-36x+45$$

Solución

Como $2+i$ es un cero del polinomio y éste tiene coeficientes reales, entonces su conjugado $2-i$ también es un cero.

Utilizando división sintética para $2+i$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 14 & -36 & 45 & 2+i \\ & 2+i & -5 & 18+9i & -45 & \\ \hline 1 & -2+i & 9 & -18+9i & 0 & \end{array}$$

Los productos de complejos en la división sintética anterior son los siguientes

$$(-2+i)(2+i)=-4+2i-2i+i^2=-4-1=-5$$

$$(-18+9i)(2+i)=-36-18i+18i+9i^2=-36+9(-1)=-45$$

Utilizando división sintética con el polinomio reducido y el cero conjugado $2-i$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2+i & 9 & -18+9i & 2-i \\ & 2-i & 0 & 18-9i & \\ \hline 1 & 0 & 9 & 0 & \end{array}$$

El nuevo polinomio reducido es

$$x^2-9$$

Del cual se obtiene que los otros dos ceros del polinomio son

$$x^2+9=0$$

$$x=\pm\sqrt{-9}$$

$$x=\pm 3i$$

Se concluye que los cuatro ceros del polinomio son

$$2+i,\quad 2-i,\quad 3i,\quad -3i$$

Factores de un polinomio

En muchos casos es necesario factorizar un polinomio como un producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles.

Un factor cuadrático de la forma ax^2+bx+c se llama irreducible si no tiene ceros reales, es decir que sus dos ceros son números complejos. Aunque un polinomio se puede expresar como producto de factores lineales de la forma $x-z$, donde z es un número complejo, generalmente es preferible dejar los factores cuadráticos irreducibles. El siguiente teorema garantiza la factorización de un polinomio

Factores lineales y cuadráticos de un polinomio

Todo polinomio de grado $n>0$, con coeficientes reales se puede escribir como el producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles que tienen coeficientes reales.

Ejemplo 2: Factorizando un polinomio

Factorice el polinomio como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles.

$$P(x) = 16x^6 + 8x^4 + 32x^3 - 43x^2 + 12x$$

Solución

Como el polinomio no tiene término constante, lo primero que hay que hacer es factorizar x.

$$P(x) = x\left(16x^5 + 8x^3 + 32x^2 - 43x + 12\right)$$

El polinomio reducido es

$$P_1(x) = 16x^5 + 8x^3 + 32x^2 - 43x + 12$$

y es sobre éste que debemos calcular los posibles ceros racionales y la naturaleza de los ceros

$$\frac{\text{factores de } 12}{\text{factores de } 16} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16}$$

De donde se tiene que las posibles raíces racionales son

$$\left\{\pm\frac{1}{16}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{16}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\right\}$$

Como $P_1(x)$ tiene dos variaciones de signo puede haber 2 o 0 ceros positivos,

Probando con $x = 1$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 16 & 0 & 8 & 32 & -43 & 12 & 1 \\ & 16 & 16 & 24 & 56 & 13 & \\ \hline 16 & 16 & 24 & 56 & 13 & 25 & \end{array}$$

Como todos los números de la tercera fila son positivos $x = 1$ es una cota superior y el polinomio no tiene ceros mayores que 1.

Probando con $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 16 & 0 & 8 & 32 & -43 & 12 & 1/2 \\ & 8 & 4 & 6 & 19 & -12 & \\ \hline 16 & 8 & 12 & 38 & -24 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = \frac{1}{2}$ es un cero del polinomio. El polinomio reducido es

$$P_2(x) = 16x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 38x - 24$$

Probando nuevamente con $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 16 & 8 & 12 & 38 & -24 & 1/2 \\ & 8 & 8 & 10 & 24 & \\ \hline 16 & 16 & 20 & 48 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = \frac{1}{2}$ es cero de multiplicidad 2.

El nuevo polinomio reducido es

$$P_2(x) = 16x^3 + 16x^2 + 20x + 48$$

El polinomio no tiene más ceros positivos, por lo que ahora se buscará un cero negativo.

Probando con $x = -1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 16 & 16 & 20 & 48 & -1 \\ & -16 & 0 & -20 & \\ \hline 16 & 0 & 20 & 28 & \end{array}$$

Probando con $x = -2$

$$\begin{array}{rrrr|l} 16 & 16 & 20 & 48 & -2 \\ & -32 & 32 & -104 & \\ \hline 16 & -16 & 52 & -56 & \end{array}$$

Como todos los números de la tercera fila son alternos en signo el polinomio no tiene raíces menores que -2. Por otro lado existe al menor un cero entre -1 y -2 ya que los residuos tienen signos opuestos.

Probando con $x = -\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{rrrr|l} 16 & 16 & 20 & 48 & -3/2 \\ & -24 & 12 & -48 & \\ \hline 16 & -8 & 32 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = -\frac{3}{2}$ es un cero. El nuevo polinomio reducido es

$$P_3(x) = 16x^2 - 8x + 32$$

Como es de segundo grado se puede resolver por factorización o fórmula cuadrática

$$16x^2 - 8x + 32 = 0$$

$$8\left(2x^2 - x + 4\right) = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4(2)(4)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{31}\, i}{4}$$

Los otros dos ceros son complejos y el polinomio de segundo grado es irreducible. Por lo tanto el polinomio original se factoriza como

$$P(x) = 8x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(2x^2 - x + 4\right)$$

Ejemplo 3: Encontrando un polinomio dados algunos de sus ceros

Obtenga el polinomio con coeficientes reales de grado 6 sabiendo -2 es un cero de multiplicidad 2, que tiene dos ceros complejos $3i$ y $3 - 5i$. Además el polinomio pasa por el punto $(1,-3)$

Solución

Si $x = -2$ es un cero de multiplicidad 2 entonces el polinomio tiene como factor

$$(x + 2)^2$$

Como el polinomio buscado tiene coeficientes reales si $x = 3i$ es un cero complejo, su conjugado $x = -3i$ también es un cero del polinomio, por lo que otros dos factores del polinomio son

$$(x - 3i)(x + 3i) = x^2 - 9i^2 = x^2 - 9(-1) = x^2 + 9$$

Si $x = 3 - 5i$ es otro cero complejo su conjugado $x = 3 + 5i$ también será un cero, de donde se obtienen los otros dos factores

$$\begin{aligned}(x-(3-5i))(x-(3+5i)) &= (x-3+5i)(x-3-5i)\\ &= x^2 - 3x - 5ix - 3x + 9 + 15i + 5xi - 15i - 25i^2\\ &= x^2 - 6x + 9 - 25(-1)\\ &= x^2 - 6x + 34\end{aligned}$$

El polinomio de grado 6 será el producto de los factores siguientes

$$P(x) = k(x+2)^2\left(x^2+9\right)\left(x^2-6x+34\right)$$

Finalmente, para determinar la constante k utilizamos el hecho de que el polinomio pasa por el punto $(1,-3)$. Sustituimos $P(1) = -3$ y despejamos k

$$\begin{aligned}-3 &= k(1+2)^2\left(1^2+9\right)\left(1^2-6(1)+34\right)\\ -3 &= k(9)(10)(29)\\ k &= \frac{-3}{2610} = -\frac{1}{870}\end{aligned}$$

El polinomio buscado es

$$P(x) = -\frac{1}{870}(x+2)^2\left(x^2+9\right)\left(x^2-6x+34\right)$$

Ejercicios de la sección 4.

En los ejercicios 1 a 5 se da un polinomio y uno de sus ceros. Encuentre los otros ceros del polinomio.

1. $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2;\quad 1+i$

2. $x^4 - 6x^3 + 71x^2 - 146x + 530;\quad 2+7i$

3. $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 10x + 10;\quad \sqrt{2}\,i$

4. $12x^4 - 52x^3 + 19x^2 - 13x + 4;\quad \frac{1}{2}i$

5. $x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 13x^2 + 12x - 4;\quad -2i$

En los ejercicios 6 a 10 encuentre todos los ceros del polinomio y exprese el mismo como un producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles.

6. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24$

7. $2x^4 + x^3 + 39x^2 + 136x - 78$

8. $x^4 - 4x^3 + 53x^2 - 196x + 196$

9. $x^5 + 11x^3 + 18x$

10. $x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 32x^3 + 40x^2$

En los ejercicios 11 a 15 utilice una computadora para dibujar la gráfica del polinomio, a partir de la gráfica estime los ceros del polinomio y luego utilice división sintética para encontrar los valores exactos

11. $4x^3 + 3x^2 + 16x + 12$

12. $24x^3 - 62x^2 - 7x + 30$

13. $12x^3 - 52x^2 + 27x + 28$

14. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

15. $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24$

En los ejercicios 16 a 20 encuentre un polinomio del menor grado posible cuyos ceros están dados

16. $4, -3, 2$

17. $3, -2i, 2i$

18. $2+3i, 2-3i, -5, 2$

19. $1+3i, 1-3i, -5i, 5i$

20. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1+3i, 1-3i, -2i, 2i$

En los ejercicios 21 a 30 encuentre el polinomio con coeficientes reales que satisface las condiciones dadas

21. Ceros: $-3, 2-5i$, grado 4 y pasa por el punto $(0,-2)$.

22. -1 es un cero de multiplicidad 4, grado 4 y pasa por el punto $(1, 20)$.

23. Ceros: $4+3i, 2-3i$, grado 4.

24. Ceros: $3i, 2$, grado 3, $P(3) = 27$

25. Ceros: $1-i, \frac{1}{2}$, grado 3, $P(4) = 140$

26. Grado 5, 1 es un cero de multiplicidad 2, 2 es un cero de multiplicidad 3 y $P(-1) = -54$

27. Grado 5, -4 es un cero de multiplicidad 4 y $\frac{1}{2}$ es un cero de multiplicidad 1 y $P(1) = 125$

28. Grado 6, tal que 0 es un cero de multiplicidad 3, -3 es un cero de multiplicidad 1, $-1+4i$ es un cero complejo y el coeficiente principal es 5.

29. Grado 7, -2 es un cero de multiplicidad 2, 3 es un cero de multiplicidad 3, $\frac{i}{3}$ es un cero complejo y $f(-1) = -18$.

30. Grado 4, ceros: $1-i$, 3, 5 y término constante -6.

Ejercicios de la sección 4.4

En los ejercicios 1 a 5 se da un polinomio y uno de sus ceros. Encuentre los otros ceros del polinomio.

1. $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2; \quad 1 + i$

2. $x^4 - 6x^3 + 71x^2 - 146x + 530; \quad 2 + 7i$

3. $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 10x + 10; \quad \sqrt{2}\,i$

4. $12x^4 - 52x^3 + 19x^2 - 13x + 4; \quad \frac{1}{2}i$

5. $x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 13x^2 + 12x - 4; \quad -2i$

En los ejercicios 6 a 10 encuentre todos los ceros del polinomio y exprese el mismo como un producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles.

6. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24$

7. $2x^4 + x^3 + 39x^2 + 136x - 78$

8. $x^4 - 4x^3 + 53x^2 - 196x + 196$

9. $x^5 + 11x^3 + 18x$

10. $x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 32x^3 + 40x^2$

En los ejercicios 11 a 15 utilice una computadora para dibujar la gráfica del polinomio, a partir de la gráfica estime los ceros del polinomio y luego utilice división sintética para encontrar los valores exactos

11. $4x^3 + 3x^2 + 16x + 12$

12. $24x^3 - 62x^2 - 7x + 30$

13. $12x^3 - 52x^2 + 27x + 28$

14. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$

15. $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24$

En los ejercicios 16 a 20 encuentre un polinomio del menor grado posible cuyos ceros están dados

16. $4, -3, 2$

17. $3, -2i, 2i$

18. $2 + 3i, 2 - 3i, -5, 2$

19. $1 + 3i, 1 - 3i, -5i, 5i$

20. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + 3i, 1 - 3i, -2i, 2i$

En los ejercicios 21 a 30 encuentre el polinomio con coeficientes reales que satisface las condiciones dadas

21. Ceros: $-3, 2 - 5i$, grado 4 y pasa por el punto $(0, -2)$.

22. -1 es un cero de multiplicidad 4, grado 4 y pasa por el punto $(1, 20)$.

23. Ceros: $4 + 3i, 2 - 3i,$ grado 4.

24. Ceros: $3i, 2,$ grado 3, $P(3) = 27$

25. Ceros: $1 - i, \frac{1}{2},$ grado 3, $P(4) = 140$

26. Grado 5, 1 es un cero de multiplicidad 2, 2 es un cero de multiplicidad 3 y $P(-1) = -54$

27. Grado 5, -4 es un cero de multiplicidad 4 y $\frac{1}{2}$ es un cero de multiplicidad 1 y $P(1) = 125$

28. Grado 6, tal que 0 es un cero de multiplicidad 3, -3 es un cero de multiplicidad 1, $-1 + 4i$ es un cero complejo y el coeficiente principal es 5.

29. Grado 7, -2 es un cero de multiplicidad 2, 3 es un cero de multiplicidad 3, $\frac{i}{3}$ es un cero complejo y $f(-1) = -18$.

30. Grado 4, ceros: $1 - i$, 3, 5 y término constante -6.