4.3 Ceros de funciones polinomiales

OBJETIVOS

- Encontrar los posibles ceros racionales de una función polinomial.
- Encontrar una cota superior y una cota inferior para los ceros de una función polinomial.
- Encontrar la naturaleza de las raíces utilizando la regla de signos de Descartes.
- Encontrar los ceros de una función polinomial utilizando división sintéica.
- Plantear y resolver problemas en donde el modelo es una función polinomial.

Recordemos que si $P(x)$ es una función polinomial, entonces los valores de x donde $P(x)$ es igual a cero, se llaman son llamados ceros de $P(x)$, o en forma equivalente son llamados raíces de la ecuación $P(x)=0$. Por otro lado un número puede ser cero varias veces, en este caso decimos que el número es un cero múltiple.

Cuando buscamos los ceros de un polinomio es importante saber cuántos ceros tiene ese polinomio. Esta pregunta será respondida completamente en la próxima sección, pero por el momento y para poder trabajar en ésta sección anticipamos el siguiente teorema.

NÚMERO DE CEROS DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Una función polinomial P de grado n tiene exactamente n ceros, donde cada cero de multiplicidad k es contado k veces.

Teorema de los ceros racionales

Cuando queremos encontrar los ceros de un polinomio, nos interesa obtener inicialmente los ceros racionales. Para encontrarlos se debe hacer uso del siguiente teorema.

TEOREMA DE LOS CEROS RACIONALES

Si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ es un polinomio que tiene solamente coeficientes enteros y $\frac{p}{q}$ es un cero racional, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n.

El teorema anterior permite establecer todos los números racionales que pueden ser ceros del polinomio, para ello se calculan los factores de a_0 y se dividen entre los factores de a_n. Es decir que los posibles ceros racionales están dados por

$$\frac{\text{Factores de } a_0}{\text{Factores de } a_n}$$

Ejemplo 1: Calculando los posibles ceros racionales

Encuentre los posibles ceros racionales de los siguientes polinomios

a. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12$ **b.** $4x^5 - 20x^4 + 7x^2 - x + 6$

Solución

a. Los posibles ceros racionales del polinomio $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12$ son

$$\frac{\text{Factores de } a_0}{\text{Factores de } a_n} = \frac{\text{Factores de } 12}{\text{Factores de } 1}$$

$$= \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1}$$

Al obtener todas las combinaciones posibles que resulten entre el numerador y el denominador resulta que los posibles ceros racionales son

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Es decir que si el polinomio tiene ceros racionales, deben ser algunos de los números en el conjunto anterior.

b. Los posibles ceros racionales del polinomio $4x^5 - 20x^4 + 7x^2 - x + 6$ son

$$\frac{\text{Factores de } a_0}{\text{Factores de } a_n} = \frac{\text{Factores de } 6}{\text{Factores de } 4}$$

$$= \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6,}{\pm 1, \pm 2, \pm 4}$$

Los posibles ceros racionales consisten en todas las combinaciones posibles que resulten de combinar los factores de 6 con los factores de 4, estas combinaciones son

$$\left\{\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm 6\right\}$$

Cotas superior e inferior para los ceros reales

Un número real b es llamado cota superior de los ceros de $P(x)$ si P no tiene ceros mayores que b. Un número real a se llama cota inferior de los ceros de $P(x)$ si P no tiene ceros menores que a. El siguiente teorema se utiliza para establecer una cota superior $b > 0$ y una cota inferior $a < 0$, por medio de la división sintética.

TEOREMA DE LAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR

Si $b > 0$ y todos los números que se obtienen en la tercera fila al utilizar división sintética para dividir el polinomio P entre $x - b$ son positivos o cero, entonces b es una cota superior de los ceros reales de P.

Si $a < 0$ y todos los números que se obtienen en la tercera fila al utilizar división sintética para dividir el polinomio P entre $x - a$ son alternos en signo (el número cero puede ser considerado positivo o negativo), entonces a es una cota inferior de los ceros reales de P.

Las cotas superior e inferior no son únicas. Si b es una cota superior, cualquier número mayor que b también es una cota superior y si a es una cota inferior, cualquier número menor que a también es una cota inferior.

Ejemplo 2: Estableciendo una cota superior y una cota inferior

Establezca una cota superior y una cota inferior para los ceros del polinomio

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 15$$

Solución

Los posibles ceros racionales son

$$\frac{\text{Factores de } a_0}{\text{Factores de } a_n} = \frac{\text{Factores de } 15}{\text{Factores de } 1}$$

$$= \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$$

Al utilizar la división sintética con $x = 3$ se obtiene

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 6 & 0 & 15 & 3 \\ & 3 & 3 & 27 & 51 & \\ \hline 1 & 1 & 9 & 27 & 66 & \end{array}$$

Como todos los números de la tercera fila son positivos, el polinomio no tiene raíces mayores que 3, por lo tanto 3 es una cota superior.

Ahora se tratara de establecer si -1 es una cota inferior

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 6 & 0 & 15 & -1 \\ & -1 & 3 & -9 & 9 & \\ \hline 1 & -3 & 9 & -9 & 24 & \end{array}$$

Como todos los números de la tercera fila se alternan en signos +, –, +, –. El polinomio no tiene ceros menores que -1, por lo tanto -1 es una cota inferior.

Regla de signos de Descartes

Otro teorema utilizado para obtener información acerca de los ceros de un polinomio es la regla de signos de Descartes. En ésta regla hay que contar el número de variaciones de los signos de los coeficientes del polinomio $P(x)$ o de $P(-x)$. Estas variaciones se refieren a las veces que cambia el signo positivo o negativo de los coeficientes cuando se examinan consecutivamente de izquierda a derecha; los términos del polinomio deben estar ordenados en orden decreciente, por ejemplo en el polinomio

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 5x + 6$$

Al examinar las variaciones de $P(x)$ se obtiene

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 \underset{1}{-} 5x^2 \underset{2}{+} 5x + 6$$

Entonces hay dos variaciones de signo en $P(x)$.

Las variaciones de signo de $P(-x)$ se obtienen sustituyendo $-x$ por x en el polinomio, simplificando la expresión resultante y luego contando las variaciones de los signos. Para el polinomio del ejemplo ilustrativo se tiene

$$P(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^3 - 5(-x)^2 + 5(-x) + 6$$
$$= \underbrace{2x^4 - 3x^3}_{1} - 5x^2 \underbrace{- 5x + 6}_{2}$$

Entonces hay dos variaciones de signo en $P(-x)$.

Regla de signos de Descartes

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, sus términos ordenados en orden decreciente con respecto a x y $a_0 \neq 0$.

1. El número de ceros reales positivos, es igual al número de variaciones de signo de $P(x)$ o es igual a éste número disminuido en un número par.
2. El número de ceros reales negativos, es igual al número de variaciones de signo de $P(-x)$ o es igual a éste número disminuido en un número par.

Ejemplo 3: Determinando la naturaleza de los ceros de un polinomio

Utilice la regla de signos de Descartes para determinar la naturaleza de las raíces de los polinomios dados

a. $P(x) = 2x^6 + 3x^5 - x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x + 6$ **b.** $P(x) = 3x^5 + 5x^3 + 2x^2 + x + 3$

Solución

a. Se comienza estableciendo las variaciones de signo de $P(x)$ y de $P(-x)$ para saber el número de raíces positivas y negativas

$$P(x) = 2x^6 \underbrace{+ 3x^5 - x^4}_{1} \underbrace{- 5x^3 + 6x^2}_{2} + x + 6$$

Como hay 2 variaciones de signo, pueden haber 2 raíces positivas o bien 0 raíces positivas.

$$P(-x) = 2(-x)^6 + 3(-x)^5 - (-x)^4 - 5(-x)^3 + 6(-x)^2 + (-x) + 6$$
$$= \underbrace{2x^6 - 3x^5}_{1} \underbrace{- x^4 + 5x^3}_{2} \underbrace{+ 6x^2 - x}_{3} \underbrace{- x + 6}_{4}$$

Como hay 4 variaciones de signo, entonces el polinomio puede tener 4 o bien 2 o bien 0 raíces negativas.

Para completar el análisis de la naturaleza de las raíces, usualmente se hace un resumen en una tabla que incluye las raíces positivas, las negativas, las complejas y el total de raíces que es igual al grado del polinomio. En éste ejemplo la tabla es la siguiente

Positivas	Negativas	Complejas	Total
2	4	0	6
2	2	2	6
2	0	4	6
0	4	2	6
0	2	4	6
0	0	6	6

En la tabla anterior hay seis filas pues hay seis combinaciones posibles entre el número de raíces positivas y el número de raíces negativas. La tabla debe tener tantas filas como combinaciones haya entre las raíces positivas y negativas. El número de raíces complejas resulta de restar al total de raíces la suma de las raíces positivas y negativas.

b. Se comienza estableciendo las variaciones de signo de $P(x)$ y de $P(-x)$ para saber el número de raíces positivas y negativas

$$P(x) = +3x^5 + 5x^3 + 2x^2 + x + 3$$

Como no hay variaciones de signo, el polinomio no tiene raíces positivas.

$$\begin{aligned} P(-x) &= 3(-x)^5 + 5(-x)^3 + 2(-x)^2 + (-x) + 3 \\ &= -3x^5 - 5x^3 \underset{1}{\curvearrowright} + 6x^2 \underset{2}{\curvearrowright} - x \underset{3}{\curvearrowright} + 6 \end{aligned}$$

Como hay 3 variaciones de signo, entonces el polinomio tiene 3 o bien 1 raíz negativa.

La tabla siguiente resume las combinaciones posibles

Positivas	Negativas	Complejas	Total
0	3	2	5
0	1	4	5

En la tabla anterior hay dos filas pues sólo hay dos combinaciones posibles entre raíces positivas y negativas.

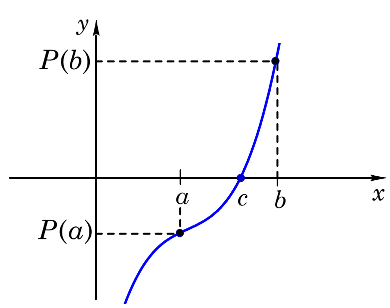
Localización de los ceros de un polinomio

Finalmente, pero no menos importante está el teorema de localización de los ceros, el cual permite encontrar dos números reales entre los cuales se encuentra al menos un cero. Al saber que un cero está entre dos números a y b se puede utilizar la división sintética para probar con todos los posibles ceros racionales localizados entre a y b. Si ninguno de ellos es cero entonces el cero entre a y b es un número irracional.

Teorema de localización de los ceros

Sea $P(x)$ un polinomio. Si $a < b$, y $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos un número c entre a y b tal que $P(c) = 0$.

En la siguiente figura se muestra un polinomio donde $P(a)$ es negativo y $P(b)$ es positivo. La gráfica ilustra claramente la existencia del número c, que es un cero del polinomio.



Procedimiento para encontrar los ceros racionales

Aunque son muchos los teoremas sobre polinomios que se han estudiado en ésta sección, se presenta un procedimiento para encontrar los ceros racionales en un polinomio de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

1. Utilice el teorema de los ceros racionales para encontrar los posibles ceros racionales.
2. Utilice la regla de los signos de descartes para encontrar la naturaleza de los ceros.
3. Utilice la división sintética para evaluar los posibles ceros racionales. Cuando encuentre un número c para el cual el residuo es cero, entonces c es un cero de $P(x)$.
4. Al encontrar un cero se debe repetir el paso 3 con el polinomio reducido, es decir el cociente, cuyos coeficientes son los números en la tercera fila de la división sintética.
5. Cuando el cociente es un polinomio que se puede factorizar fácilmente encuentre los ceros restantes por factorización, si el cociente es un polinomio de grado dos puede usar la fórmula cuadrática.
6. Recuerde que si $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos un cero entre a y b. Si éste cero no es uno de los posibles ceros racionales, entonces el cero es irracional y no se puede encontrar por los métodos de ésta sección.
7. Si todos los números de la tercera fila son positivos o cero cuando prueba con un posible cero positivo, se ha encontrado una cota superior. Si todos los números de la tercera fila se alternan en signo cuando se prueba un posible cero negativo, se ha encontrado una cota inferior.

Ejemplo 4: Encontrando los ceros de un polinomio

Dada la función polinomial

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 24x - 8$$

a. Determine las posibles raíces racionales.

b. Use la regla de signos de Descartes determine la naturaleza de las raíces.

c. Encuentre todas las raíces del polinomio.

d. Exprese el polinomio como un producto de factores lineales

Solución

a. Las posibles raíces racionales las encontramos calculando los factores de 8 y dividiéndolos entre los factores de 1

$$\text{Posibles raíces racionales} = \frac{\text{factores de } 8}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8}{\pm 1}$$

De donde obtenemos que las posibles raíces racionales son

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

b. Para determinar el número de raíces positivas usamos las variaciones de signo de $f(x)$

$$f(x) = \underbrace{x^4 - }_{1} 3x^3 - 20x^2 - 24x - 8$$

Como $f(x)$ tiene una variación de signo, la ecuación tiene exactamente una raíz positiva.

Para determinar el número de raíces negativas usamos las variaciones de signo de $f(-x)$

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^3 - 20(-x)^2 - 24(-x) - 8$$

$$f(-x) = x^4 + 3x^3 - 20x^2 + 24x - 8$$

Como $f(-x)$ tiene 3 variaciones de signo, el polinomio tiene 3 ceros negativos o bien 1 cero negativo.

Con la información anterior podemos construir una tabla que resume la naturaleza de las raíces

Positivas	Negativas	Complejas	Total
1	3	0	4
1	1	2	4

c. Por medio de división sintética encontramos los ceros racionales

Probando con $x = 4$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -3 & -20 & -24 & -8 & 4 \\
 & 4 & 4 & -64 & -352 & \\
\hline
1 & 1 & -16 & -88 & -360 &
\end{array}$$

Probando ahora con $x = 8$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -3 & -20 & -24 & -8 & 8 \\
 & 8 & 40 & 160 & 1088 & \\
\hline
1 & 5 & 20 & 136 & 1080 &
\end{array}$$

Observe que todos los números de la tercera fila en la última división son positivos, entonces 8 es una cota superior, es decir que no hay ceros mayores que 8.

Por otro lado, como los residuos tienen signos opuestos, podemos estar seguros que entre $x = 4$ y $x = 8$ hay una raíz, como ésta no es racional, tiene que ser irracional. Las raíces irracionales no se pueden encontrar de forma exacta utilizando división sintética.

Se buscará ahora los ceros negativos.

Probando con $x = -2$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -3 & -20 & -24 & -8 & -2 \\
 & -2 & 10 & 20 & 8 & \\
\hline
1 & -5 & -10 & -4 & 0 &
\end{array}$$

De donde $x = -2$ es un cero de del polinomio.

El polinomio original puede expresarse en forma factorizada como

$$f(x) = (x + 2)(x^3 - 5x^2 - 10x - 4)$$

Ahora se debe seguir trabajar con el polinomio reducido

$$f_1(x) = x^3 - 5x^2 - 10x - 4$$

Probando con $x = -4$

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & -5 & -10 & -4 & -4 \\
 & -4 & 36 & -104 & \\
\hline
1 & -9 & 26 & -108 &
\end{array}$$

Como todos los números del tercer renglón se alternan en signo, el polinomio no tiene raíces menores que –4, es decir que –4 es una cota inferior.

Probando ahora con $x = -1$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -10 & -4 & -1 \\ & -1 & 6 & 4 & \\ \hline 1 & -6 & -4 & 0 & \end{array}$$

de donde $x = -1$ es un cero y el polinomio inicial puede factorizarce como

$$f(x) = (x+2)(x+1)(x^2 - 6x - 4)$$

El polinomio reducido $f_2(x) = x^2 - 6x - 4$ es de segundo grado y puede ser resuelto por medio de la fórmula general. Los otros dos ceros son

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-4)}}{(2)(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 3 \pm \sqrt{13}$$

De donde todos los ceros del polinomio son:

$$-2, \quad -1, \quad 3+\sqrt{13} \quad \text{y} \quad 3-\sqrt{13}$$

d. El polinomio factorizado como un producto de factores lineales es

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(x+1)\left(x - \left(3+\sqrt{13}\right)\right)\left(x - \left(3-\sqrt{13}\right)\right) \\ &= (x+2)(x+1)\left(x - 3 - \sqrt{13}\right)\left(x - 3 + \sqrt{13}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 5: Encontrando los ceros de un polinomio con raíces nulas

Dada la función polinomial

$$P(x) = 2x^6 - 5x^5 + 9x^4 + x^3 - 15x^2$$

a. Determine las posibles raíces racionales.

b. Use la regla de signos de Descartes determine la naturaleza de las raíces.

c. Encuentre todas las raíces del polinomio.

d. Exprese el polinomio como un producto de factores lineales

e. Dibuje la gráfica del polinomio.

Solución

Primero observe que el polinomio tiene factor común x^2, factorizando se tiene

$$P(x) = 2x^6 - 5x^5 + 9x^4 + x^3 - 15x^2$$

$$P(x) = x^2(2x^4 - 5x^3 + 9x^2 + x - 15)$$

Por lo que $x = 0$, es una raíz del polinomio de multiplicidad 2. El polinomio reducido es

$$P_1(x) = 2x^4 - 5x^3 + 9x^2 + x - 15$$

a. Posibles raíces racionales $= \dfrac{\text{factores de } 15}{\text{factores de } 2} = \dfrac{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15}{\pm 1, \pm 2}$

De donde se tiene que las posibles raíces racionales son

$$\left\{ \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm 3, \pm 5, \pm\frac{15}{2}, \pm 15 \right\}$$

b. Para determinar el número de raíces positivas usamos las variaciones de signo de $P_1(x)$

$$P_1(x) = 2x^4 \underset{1}{\curvearrowright} - 5x^3 \underset{2}{\curvearrowright} + 9x^2 + x \underset{3}{\curvearrowright} - 15$$

Como $P_1(x)$ tiene tres variaciones de signo, el polinomio tiene 3 o 1 ceros positivos

Para determinar el número de ceros negativos usamos las variaciones de signo de $P_1(-x)$

$$P_1(-x) = 2(-x)^4 - 5(-x)^3 + 9(-x)^2 + (-x) - 15$$

$$P_1(-x) = 2x^4 + 5x^3 + 9x^2 \underset{1}{\curvearrowright} - x - 15$$

Como $P_1(-x)$ tiene 1 variación de signo, la ecuación tiene exactamente 1 cero negativo.

Con la información anterior podemos construir una tabla que resume la naturaleza de las raíces

Positivas	Negativas	Complejas	Total
3	1	0	4
1	1	2	4

c. Para encontrar las raíces racionales se utiliza división sintética

Probando con $x = 3$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -5 & 9 & 1 & -15 & \underline{3} \\ & 6 & 3 & 36 & 111 & \\ \hline 2 & 1 & 12 & 37 & 96 & \end{array}$$

Como todos los números del tercer renglón son positivos, 3 es una cota superior, es decir que el polinomio no tiene raíces mayores que 3.

Probemos ahora con $x = 1$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -5 & 9 & 1 & -15 & \underline{1} \\ & 2 & -3 & 8 & 9 & \\ \hline 2 & -3 & 8 & 9 & -6 & \end{array}$$

Como $P_1(3) = 96$ y $P_1(1) = -6$, tienen signos opuestos, el polinomio tiene al menos un cero entre 1 y 3, si éste cero es racional debe ser 3/2

Probando con $x = \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -5 & 9 & 1 & -15 & \underline{3/2} \\ & 3 & -3 & 9 & 15 & \\ \hline 2 & -2 & 6 & 10 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = \frac{3}{2}$ es un cero del polinomio. El polinomio original factorizado es

$$P(x) = x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(2x^3 - 2x^2 + 6x + 10\right)$$

El nuevo polinomio reducido es

$$P_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 6x - 10$$

Buscando la raíz negativa, se prueba con $x = -1$

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 6 & -10 & -1 \\ & -2 & 4 & 10 & \\ \hline 2 & -4 & 10 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = -1$ es un cero y el polinomio original puede factorizarce como

$$P(x) = x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1)\left(2x^2 - 4x + 10\right)$$

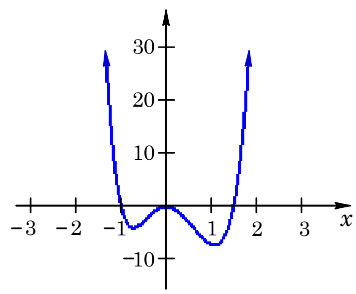
El nuevo polinomio reducido es $P_3(x) = 2x^2 - 4x + 10$, las últimas dos raíces las se encuentran usando la fórmula general

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(10)}}{(2)(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{4} = \frac{4 \pm 8i}{4} = 1 \pm 2i$$

De donde todos los ceros del polinomio son

$$0, \quad 0, \quad -1, \quad \frac{3}{2}, \quad 1+2i, \quad 1-2i$$

e. La siguiente figura muestra la representación gráfica del polinomio

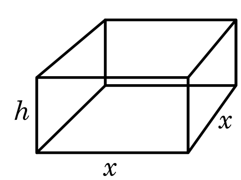


Ejemplo 6: Dimensiones de una caja rectangular

Se quiere construir una caja rectangular abierta de base cuadrada. La caja debe tener una capacidad de 384 cm³ y será construida de un material para la base que cuesta Q3 el centímetro cuadrado y el material para los lados tiene un costo de Q2 el centímetro cuadrado. Determine las dimensiones de la caja si se dispone de Q576 para su construcción.

Solución

Sea x la longitud de la base y h la altura de la caja, como se muestra en la figura siguiente



Como el volumen es igual al área de la base por la altura, se tiene

$$V = \left(x^2\right)h$$

Despejando h en términos de x

$$h = \frac{V}{x^2} = \frac{384}{x^2}$$

El costo de los materiales depende del área superficial de la caja. El área de la base es

$$A.B. = x^2$$

Note que solo se toma una de las bases pues la caja es abierta.

Como las cuatro caras laterales son iguales, el área lateral es

$$A.L. = 4(xh)$$

El costo de la base se encuentra multiplicando el precio Q3 del material por el área de la base, mientras que el costo de los lados se encuentra multiplicando Q2 por el área lateral. El costo total es

$$\text{Costo total} = \text{Costo de la base} + \text{Costo de los lados}$$

$$C.T. = 3\left(x^2\right) + 2(4xh)$$

$$576 = 3x^2 + 8xh$$

Sustituyendo $h = \dfrac{384}{x^2}$ y resolviendo la ecuación para x

$$576 = 3x^2 + 8x\left(\frac{384}{x^2}\right)$$

$$576 = 3x^2 + \frac{3072}{x}$$

$$576x = 3x^3 + 3072$$

$$x^3 - 192x + 1024 = 0$$

Al resolver la ecuación por los métodos estudiados en ésta sección se obtiene que la única raíz positiva es $x = 8$.

La altura de le caja es entonces

$$h = \frac{384}{x^2} = \frac{384}{(8)^2} = 6$$

Por lo tanto las dimensiones de la caja son: base cuadrada de 8 cm y altura 6 cm.

Ejercicios de la sección 4.3

En los ejercicios 1 a 5 encuentre los posibles ceros racionales del polinomio.

1. $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

2. $2x^3 - x^2 - 6x + 12$

3. $6x^4 - 18x^2 - 4x - 4$

4. $8x^4 + 10x^3 - 6x^2 - 15x - 21$

5. $15x^5 - 6x^3 - 8$

En los ejercicios 6 a 10 encuentre una cota superior y una cota inferior para los ceros reales del polinomio.

6. $x^3 + 3x^2 - 6x + 6$

7. $6x^4 + 23x^3 + 19x^2 - 8x - 4$

8. $2x^3 + 9x^2 - 2x - 9$

9. $x^5 - x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 12x - 12$

10. $x^5 - 32$

En los ejercicios 11 a 15 utilice la regla de los signos de Descartes para encontrar la naturaleza de los ceros del polinomio

11. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

12. $6x^4 + 23x^3 + 19x^2 - 8x - 4$

13. $8x^4 + 10x^3 - 6x^2 - 15x - 21$

14. $x^5 - x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 12x - 12$

15. $x^5 - 32$

En los ejercicios 16 a 25 encuentre los posibles ceros racionales, use la regla de los signos de Descartes para construir una tabla con la naturaleza de las raíces y encuentre todos los ceros del polinomio.

16. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

17. $6x^4 + 23x^3 + 19x^2 - 8x - 4$

18. $2x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 27x - 12$

19. $x^5 - 3x^3 - 2x^2$

20. $8x^3 + 18x^2 + 45x + 27$

21. $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2$

22. $2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$

23. $x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 24x - 8$

24. $6x^4 - 17x^3 - 11x^2 + 42x$

25. $x^6 + 6x^5 - 34x^4 + 56x^3 - 39x^2 + 10x$

En los ejercicios 26 a 35 encuentre los posibles ceros racionales, encuentre todos los ceros del polinomio, exprese el polinomio como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles. Dibuje la representación gráfica del polinomio.

26. $4x^3 - 19x^2 + 9$

27. $x^6 - 13x^4 + 36x^2$

28. $6x^4 - 17x^3 + 7x^2 + 8x - 4$

29. $3x^4 - 22x^3 - 41x^2 - 4x - 28$

30. $25x^5 + 5x^4 - 16x^3 + 2x^2$

31. $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

32. $3x^4 - 22x^3 - 41x^2 - 4x - 28$

33. $27x^5 - 27x^4 - 45x^3 - 17x^2 - 2$

34. $6x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 4x - 12$

35. $16x^7 - 60x^6 + 72x^5 - 67x^4 + 30x^3$

36. Un triángulo rectángulo tiene un área de 60 cm^2 y su hipotenusa mide 2 cm más que el cateto mayor. Si x es la longitud del cateto mayor, determine las dimensiones del triángulo.

37. Se construirá una caja si tapadera de una lámina de 12 por 15 pies, cortándole cuadrados de área x^2 en cada una de las esquinas y luego doblando hacia arriba los lados. Determine el valor de x de tal forma que el volumen de la caja sea de 176 pies^3.

38. Se quiere construir una lata cilíndrica con una capacidad de 1200π cm^3 y con área total de 240π cm^2. Determine el radio y la altura de la lata.

39. Una caja rectangular tiene una base rectangular de 1 pie de ancho por 2 pies de largo y tiene altura de 3 pies. Si cada uno de los lados se aumenta en la misma longitud x. Determine las dimensiones de una caja que tenga 10 veces el volumen de la caja original.

40. Un silo para almacenar granos está formado por paredes en forma de un cilindro circular recto de 10 metros de altura y un techo de forma semiesférica.

- **a.** Construya un modelo que exprese el volumen del silo en términos del radio r.
- **b.** Si el silo debe tener capacidad para almacenar 1500 m^3 de maíz, utilice un programa de cómputo para dibujar la gráfica de la función polinomial y obtener un valor aproximado del radio del silo.