4.2 División de polinomios

OBJETIVOS

- Utilizar la división larga para obtener el cociente y el residuo al dividir dos polinomios.
- Utilizar la división sintética pada la división de un polinomio entre divisor de la forma $x - c$.
- Utilizar el teorema del residuo para evaluar polinomios o bien para obtener el residuo por medio de evaluación de polinomios.

Si $P(x)$ es un polinomio, entonces los valores de x donde $P(x) = 0$ son llamados ceros de $P(x)$ o bien raíces de la ecuación $P(x) = 0$. La mayoría de los procedimientos para obtener los ceros de un polinomio están basados en la división de polinomios y particularmente en la división sintética que es un procedimiento para dividir rápidamente un polinomio entre un divisor de la forma $x - c$. En ésta sección se estudia la división larga de polinomios así como la división sintética y su relación con los ceros de un polinomio.

La división larga de polinomios

El procedimiento para dividir un polinomio $P(x)$, llamado **dividendo,** entre otro polinomio $D(x)$, llamado **divisor**, es similar al procedimiento usado para dividir dos números enteros. A continuación se hace un recordatorio del procedimiento, el cual ya ha sido estudiado en cursos del bachillerato

1. Ordene el dividendo y el divisor de tal manera que sus los exponentes de sus términos queden en orden decreciente.
2. Divida el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. El resultado seré el primer término del cociente.
3. El término obtenido en el cociente se multiplica por cada uno de los términos del divisor, para obtener un polinomio que se debe restar al dividendo. Para facilitar la resta es conveniente cambiar primero el signo al polinomio y efectuar una suma.
4. Si al efectuar la resta, se obtiene un polinomio de grado mayor o igual al grado del dividendo; se repite el procedimiento a partir del inciso 2 hasta que el resultado de la resta tenga un grado menor que el grado del dividendo.
5. El polinomio obtenido en la última resta se llama **residuo** y su grado es menor que el grado del divisor. Si el residuo es cero, la división es exacta.

Ejemplo 1: división larga de polinomios

Utilice la división larga para obtener el cociente y el residuo de dividir el polinomio $x^4 - 3x^2 - x + 5$ entre $x - 3$

Solución

Al ordenar los polinomios observe que el dividendo no tiene término de grado 3. Se recomienda agregar los términos que falten colocándoles coeficiente cero.

De esa forma el dividendo lo escribimos como

$$x^4 + 0x^3 - 3x^2 - x + 5$$

Para iniciar la división colocamos el dividendo y el divisor en la forma siguiente

$$
\begin{array}{r|l}
x-3 & \overline{x^4+0x^3-3x^2-x+5}
\end{array}
$$

Al dividir el primer término del divisor, x^4 entre el primer término del dividendo x se obtiene $(x^4)\div(x)=x^3$. Este será el primer término del cociente

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \\
x-3 & \overline{x^4+0x^3-3x^2-x+5}
\end{array}
$$

Ahora se multiplica el primer término del cociente por cada término del divisor, les cambiamos el signo (pues se va a restar) y se colocan por debajo del divisor.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \\
x-3 & \overline{x^4+0x^3-3x^2-x+5} \\
 & \underline{-x^4+3x^3}
\end{array}
$$

Ahora se efectúa la suma. Observe que se eliminan los términos de grado 4

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \\
x-3 & \overline{x^4+0x^3-3x^2-x+5} \\
 & \underline{-x^4+3x^3+} \\
 & \phantom{-x^4+{}}3x^3-3x^2-x+5
\end{array}
$$

El procedimiento se repite hasta que el grado del polinomio que resulte de la suma sea menor que el grado del divisor. Las operaciones completas se muestran a continuación

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^3 & +3x^2 & +6x & +17 & \\
\cline{2-6}
x-3 & x^4 & +0x^3 & -3x^2 & -x & +5 \\
 & -x^4 & +3x^3 & & & \\
\cline{2-6}
 & & 3x^3 & -3x^2 & -x & +5 \\
 & & -3x^3 & +9x^2 & & \\
\cline{3-6}
 & & & 6x^2 & -x & +5 \\
 & & & -6x^2 & +18x & \\
\cline{4-6}
 & & & & 17x & +5 \\
 & & & & -17x & +51 \\
\cline{5-6}
 & & & & & 56
\end{array}
$$

De donde el cociente es $x^3+3x^2+6x+17$ y el residuo es 56

Al dividir polinomios es conveniente expresar el resultado como una ecuación, para ello utilizamos el algoritmo de la división.

Algoritmo de la división de polinomios

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tales que $D(x) \neq 0$, entonces existen dos polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

O en forma equivalente

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

Ejemplo 2: división larga y algoritmo de la división

Utilice la división larga para obtener el cociente y el residuo de dividir

$$\frac{x^4 + 3x^2 - 6x - 10}{x^2 + 3x - 5}$$

Exprese el resultado utilizando el algoritmo de la división

Solución

Desarrollando la división larga como en el ejemplo anterior se tiene

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x + 17 \\ \hline
x^2 + 3x - 5 & x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 6x - 10 \\
 & \underline{-x^4 - 3x^3 + 5x^2} \\
 & \quad -3x^3 + 8x^2 - 6x - 10 \\
 & \quad \underline{3x^3 + 9x^2 - 15x} \\
 & \qquad 17x^2 - 21x - 10 \\
 & \qquad \underline{-17x^2 - 51x + 85} \\
 & \qquad\qquad -72x + 75
\end{array}$$

Al expresar el resultado utilizando el algoritmo de la división

$$\frac{x^4 + 3x^2 - 6x - 10}{x^2 + 3x - 5} = x^2 - 3x + 17 + \frac{-72x + 75}{x^2 + 3x - 5}$$

o bien

$$x^4 + 3x^2 - 6x - 10 = \left(x^2 - 3x + 17\right)\left(x^2 + 3x - 5\right) + \left(-72x + 75\right)$$

División sintética

Es un procedimiento simplificado para efectuar la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - c$. Para explicar el procedimiento de la división sintética se efectuará la división del ejemplo 1

$$\frac{x^4 - 3x^2 - x + 5}{x - 3}$$

1. En un arreglo de 3 filas coloque en la primera fila los coeficientes del dividendo y el número c en el recuadro de la derecha como se muestra a continuación

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -3 & -1 & 5 & \underline{3} \\ & \square & \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \end{array}$$

Observe que se ha colocado el número 0 en la posición del término de tercer grado en el dividendo.

2. Coloque en la primera posición de la tercera fila el coeficiente principal, del dividendo, que en este ejemplo es 1

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -3 & -1 & 5 & \underline{3} \\ & \square & \square & \square & \square & \\ \hline 1 & \square & \square & \square & \square & \end{array}$$

3. Ahora empieza el proceso mecánico, multiplique el número colocado en la tercera fila por c, esto da (1)(3) = 3. Coloque el producto en la primera posición de la segunda fila. Como se muestra a continuación

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -3 & -1 & 5 & \underline{3} \\ & 3 & \square & \square & \square & \\ \hline 1 & \square & \square & \square & \square & \end{array}$$

4. Sume los números obtenidos en la segunda columna y coloque el resultado en la tercera fila

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -3 & -1 & 5 & \underline{3} \\ & 3 & \square & \square & \square & \\ \hline 1 & 3 & \square & \square & \square & \end{array}$$

5. Repita los pasos 2 y 3 hasta que se completen todas las casillas, como se muestra a continuación

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -3 & -1 & 5 & \underline{3} \\ & 3 & 9 & 18 & 51 & \\ \hline 1 & 3 & 6 & 17 & 56 & \end{array}$$

Una vez que se han concluido los cálculos, podemos obtener la información siguiente: la primera fila tiene los coeficientes del polinomio $P(x)$, el grado del polinomio es uno menos que el número de coeficientes, como hay 5 coeficientes, el grado del polinomio es 4. El polinomio es

$$P(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 - x + 5 = x^4 - 3x^2 - x + 5$$

El divisor es $x - c = x - 3$

El último número de la tercera fila nos da el residuo, en éste ejemplo el residuo es 56.

Los números de la tercera fila, excepto el último son los coeficientes del cociente $Q(x)$. El grado del cociente es una unidad menos que el grado del dividendo, el cociente es

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 17$$

Una vez que hemos obtenido toda la información podemos expresar el resultado utilizando el algoritmo de la división

$$\frac{x^4 - 3x^2 - x + 5}{x - 3} = x^3 + 3x^2 + 6x + 17 + \frac{56}{x - 3}$$

Ejemplo 3: Uso de la división sintética

Utilice la división sintética para obtener el cociente y el residuo de dividir

$$\frac{8x^5 - 7x^2 + 2}{x + \frac{1}{2}}$$

Exprese el resultado utilizando el algoritmo de la división

Solución

Para utilizar la división sintética hay que expresar el dividiendo en la forma

$$P(x) = 8x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 7x^2 + 0x + 2$$

Como el divisor es $x + \frac{1}{2}$, en la división sintética usamos $c = -\frac{1}{2}$. Al desarrollar los cálculos se obtiene el arreglo siguiente

$$\begin{array}{cccccc|c} 8 & 0 & 0 & -7 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ & -4 & 2 & -1 & 4 & -2 & \\ \hline 8 & -4 & 2 & -8 & 4 & 0 & \end{array}$$

El cociente que se obtiene es $8x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 4$ y el residuo es 0

Al utilizar el algoritmo de la división se obtiene

$$\frac{8x^5 - 7x^2 + 2}{x + \frac{1}{2}} = 8x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 4 + \frac{0}{x + \frac{1}{2}}$$

$$= 8x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 4$$

O en forma equivalente

$$8x^5 - 7x^2 + 2 = \left(8x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 4\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Observe que en éste ejemplo el residuo es cero, por lo tanto la división es exacta y el polinomio dado ahora está expresado como el producto de dos factores. De hecho la división sintética será utilizada en las próximas secciones para factorizar polinomios cuando el residuo es cero.

Teorema del residuo

El teorema del residuo es muy importante en el estudio de las funciones polinomiales, pues por medio de él podemos evaluar un polinomio utilizando división sintética o bien, calcular el residuo que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - c$ evaluando $P(c)$

Teorema del residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x - c$ el residuo es igual a $P(c)$.

El siguiente ejemplo ilustra el uso del teorema del residuo

Ejemplo 3: Uso del teorema del residuo y teorema del factor

a. Utilice el teorema del residuo para evaluar de dos formas

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6 \text{ en } x = -2$$

b. Encuentre el residuo de dividir

$$F(x) = x^{28} - 2x^{14} + 10 \text{ entre } x - 1$$

c. Utilice el teorema del factor para mostrar que $x - \frac{3}{4}$ es un factor del polinomio

$$P(x) = 4x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 11x - 6$$

Solución

a. Primero se calculará $P(-2)$ por evaluación directa

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^4 - 3(-2)^2 + 4(-2) - 6 \\ &= 16 - 12 - 8 - 6 \\ &= -10 \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del residuo éste resultado debe ser igual al residuo de dividir el polinomio entre $x + 2$. Utilizando división sintética

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -3 & 4 & -6 & -2 \\ \cline{6-6} & -2 & 4 & -2 & -4 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 & -10 & \end{array}$$

como el residuo es -10, se concluye que $P(-2) = -10$

b. Como el polinomio $F(x) = x^{28} - 2x^{14} + 10$ tiene exponentes muy grandes, no conviene utilizar división sintética, es mejor obtener el residuo evaluando $F(1)$

$$\begin{aligned} F(1) &= (1)^{28} - 2(1)^{24} + 10 \\ &= 1 - 2 + 10 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Entonces el residuo de dividir $F(x)$ entre $x - 1$ es 9.

c. Para mostrar que $x - \frac{3}{4}$ es factor de $P(x) = 4x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 11x - 6$ se puede hacer de dos formas, por división sintética debe obtenerse que el residuo es cero o bien evaluando el polinomio debe obtenerse que $P\left(\frac{3}{4}\right) = 0$. La demostración se hará por división sintética.

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 4 & -7 & -5 & 2 & 11 & -6 & \frac{3}{4} \\ \cline{7-7} & 3 & -3 & -6 & -3 & 6 & \\ \hline 4 & -4 & -8 & -4 & 8 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo es 0, entonces $x - \frac{3}{4}$ es factor del polinomio. El otro factor es el cociente que se obtiene de la tercera fila en la división sintética, el cociente es

$$4x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 4x + 8$$

El polinomio factorizado queda de la siguiente forma

$$4x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 11x - 6 = \left(x - \frac{3}{4}\right)\left(4x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 4x + 8\right)$$

Ejemplo 4: Calculando el valor de k

a. Encuentre el valor de k de tal forma que $x+1$ sea un factor del polinomio

$$P(x) = -2x^4 + kx^3 + 6x^2 - 9x + 3$$

b. Muestre que el número complejo tal y tal, es un cero del polinomio tal y tal

Solución

Si $x+1$ es un factor, entonces $x=-1$ es un cero del polinomio, por lo tanto $P(-1)=0$, entonces

$$\begin{aligned} -2(-1)^4 + k(-1)^3 + 6(-1)^2 - 9(-1) + 3 &= 0 \\ -2 - k + 6 + 9 + 3 &= 0 \\ -k + 16 &= 0 \\ k &= 16 \end{aligned}$$

Entonces si $k=16$ $x+1$ es un cero del polinomio. Para verificar la respuesta al desarrollar la división sintética el residuo debe ser cero.

$$\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 16 & 6 & -9 & 3 & \underline{-1} \\ & 2 & -18 & 12 & -3 & \\ \hline -2 & 18 & -12 & 3 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo es cero, la división es exacta y $x+1$ es un factor del polinomio.

Ejercicios de la sección 4.2

En los ejercicios 1 a 10 utilice la división larga para obtener el cociente y el residuo al dividir el primer polinomio entre el segundo. Exprese la respuesta usando el algoritmo de la división.

1. $5x^3 + 6x^2 - 17x - 20$; $x+3$

2. $6x^3 + 15x^2 - 8x + 2$; $x+4$

3. $27x^3 - 1$; $3x - 1$

4. $x^4 + 1$; $x+2$

5. $2x^4 + 15x^3 + 7x^2 - 135x - 225$; $2x+5$

6. $2x^4 - x^3 - 23x^2 + 9x + 45$; $2x^2 - x - 5$

7. $20x^4 - 3x^2 + 9$; $5x^2 - 2$

8. $24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15$; $6x^2 + 5$

9. $x^3 + 5x^2 + 6x - 19$; $x^2 + x - 4$

10. $2x^4 + 3x^3 - 7x - 10$; $x^2 - 2x - 5$

En los ejercicios 11 a 20 utilice división sintética para obtener el cociente y el residuo al dividir el primer polinomio entre el segundo. Exprese la respuesta usando el algoritmo de la división.

11. $5x^3 + 6x^2 - 8x + 1$; $x - 5$

12. $6x^3 - 4x^2 + 17 - 20$; $x+3$

13. $6x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x$; $x+1$

14. $x^5 - 1$; $x - 1$

15. $12x^3 + 5x^2 + 5x + 6$; $x + \frac{3}{4}$

16. $-x^7 - x^5 - x^3 - x - 2$; $x+1$

17. $8x^3 - 4x^2 + 6x - 3$; $x - \frac{1}{2}$

18. $2x^2 - 12x + 1$; $x + 0.3$

19. $5x^4 - 2x^2 + 6x - 1$; x

20. $3x - 14$: $x+3$

En los ejercicios 21 a 30 utilice división sintética y el teorema del residuo para evaluar $P(c)$

21. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$, $c = 3$

22. $P(x) = 6x^3 - x^2 + 4x$, $c = -3$

23. $P(x) = -x^4 + 3x^2 + 5x + 30$, $c = 8$

24. $P(x) = 1 - x^5 + x$, $c = 1$

25. $P(x) = x^5 + 20x^2 - 1$, $c = -5$

26. $P(x) = 2.6x^3 + 4.9x^2 - 9.1x - 99$; $c = 3.1$

27. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 2$; $c = 2 + \sqrt{3}$

28. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5$; $c = 4 - \sqrt{3}$

29. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$; $c = 2i$

30. $P(x) = 2x^3 - 19x^2 + 48x + 29$; $c = 5 - 2i$

En los ejercicios 31 a 40 utilice división sintética y el teorema del factor para determinar si el binomio dado es un factor de $P(x)$. Si el binomio es un factor exprese el polinomio como producto de dos factores.

31. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 27x - 90$; $x + 6$

32. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 27x - 36$; $x - 4$

33. $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$; $x - 3$

34. $P(x) = x^5 + 2x^4 - 22x^3 - 50x^2 - 75x$; $x + 5$

35. $P(x) = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 14x - 4$; $x - \dfrac{1}{4}$

36. $P(x) = 10x^4 + 9x^3 - 4x^2 + 9x + 6$; $x + \dfrac{1}{2}$

37. $P(x) = x^2 - 4x - 1$; $x - \left(2 + \sqrt{5}\right)$

38. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$; $x + \sqrt{3}$

39. $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 10x - 5$; $x - \sqrt{5}$

40. $P(x) = -2x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 2x$; $x - 2 - \sqrt{2}$

En los ejercicios 41 al 45 utilice división sintética para mostrar que c es un cero de $P(x)$

41. $4x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 11x - 6$; $c = \frac{3}{4}$

42. $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4$; $c = -\frac{2}{3}$

43. $x^4 - 2x^2 - 3$: $c = -i$

44. $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$; $c = 2i$

45. $3x^3 + 22x^2 + 59x - 50$; $c = -4 - 3i$

En los ejercicios 46 al 50 determine el valor de k de tal forma que $x - c$ sea factor del polinomio dado.

46. $x^3 - 2x^2 + 5x + k$; $x + 1$

47. $-x^3 + 3x^2 + kx - 4$; $x - 1$

48. $2x^4 - 5x^3 + kx^2 - 6x + 8$; $x - 2$

49. $-3x^4 + kx^3 + 6x^2 - 9x + 3$; $x + 2$

50. $x^5 - kx^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 3$; $x + 3$