

4.1 Funciones polinomiales y sus gráficas

OBJETIVOS

- Encontrar los ceros de una función polinomial por factorización.
- Dibujar la gráfica de un polinomio utilizando la multiplicidad de los ceros y su comportamiento final.

En las secciones anteriores se han estudiado las funciones polinomiales de grado cero $f(x) = c$, las funciones polinomiales de grado 1 o funciones lineales $f(x) = mx + b$ y las funciones polinomiales de grado 2 o funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$. En ésta sección se iniciará el estudio de las funciones polinomiales de grado mayor que 2 y sus representaciones gráficas.

Función polinomial

Las funciones polinomiales se definen en la forma siguiente

FUNCIÓN POLINOMIAL

Una **función polinomial de grado n** , es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, los números $a_0, a_2, a_3, \dots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio. a_n es el coeficiente de la potencia más alta y se llama **coeficiente principal**, a_0 se llama **coeficiente constante**.

Por ejemplo el polinomio

$$P(x) = 3x^5 - 12x^3 + 6x^2 + x - 7$$

es un polinomio de grado 5, que tiene como coeficiente principal 3 y como coeficiente constante -7 .

Ceros reales de un polinomio

La representación gráfica de un polinomio $y = P(x)$ es una curva suave y continua. Si c es un número real tal que $P(c) = 0$, entonces el número c es llamado **cero** o **raíz** del polinomio P . Los ceros de un polinomio son muy importantes pues nos permiten dibujar en forma aproximada la gráfica de un polinomio y por otro lado nos permiten factorizar el polinomio utilizando el siguiente teorema del factor

TEOREMA DEL FACTOR

Si $x = c$ es un cero del polinomio $P(x)$, entonces $(x - c)$ es un factor. En forma equivalente, $(x - c)$ es un factor de $P(x)$ si y solo si $x = c$ es un cero de $P(x)$.

El siguiente teorema muestra todas las relaciones entre los ceros reales de un polinomio, factores de la forma $(x - c)$ y las intersecciones de la gráfica del polinomio con el eje x .

CEROS REALES DE UN POLINOMIO

Si P es una función polinomial y $x = c$ es un cero del polinomio $P(x)$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes y verdaderas.

1. $x = c$ es un cero de P .
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $(x - c)$ es un factor del polinomio $P(x)$.
4. El punto $(c, 0)$ es una intersección de la gráfica $y = P(x)$ con el eje x .

Ejemplo 1: Gráfica de un polinomio de grado 3

Construya un polinomio de grado 3 cuyos ceros son -2 , $\frac{1}{2}$, 3 . Dibuje su representación gráfica

Solución

Cuando se conocen todos los ceros de un polinomio, se pueden encontrar sus factores fácilmente utilizando el teorema del factor. En este ejemplo se tiene

Si $x = -2$ es un cero entonces $x - (-2) = x + 2$ es un factor.

Si $x = \frac{1}{2}$ es un cero entonces $x - \frac{1}{2}$ es un factor.

Si $x = 3$ es un cero entonces $x - 3$ es un factor.

Un polinomio de grado 3 se obtiene multiplicando todos sus factores, es decir

$$P(x) = (x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

Al simplificar el segundo factor y desarrollar productos se obtiene

$$P(x) = (x + 2)\left(\frac{2x - 1}{2}\right)(x - 3)$$

$$= \frac{1}{2}(x + 2)(2x - 1)(x - 3)$$

$$= \frac{1}{2}(2x^2 + 3x - 2)(x - 3)$$

$$P(x) = \frac{1}{2}(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6)$$

Este no es el único polinomio que tiene los ceros dados, de hecho existen infinitos polinomios que tienen los mismos ceros, que tienen como diferencia el valor de la constante que se encuentra fuera del paréntesis que para el ejemplo es $\frac{1}{2}$. Para representar en forma general a todos los polinomios que tienen los ceros dados se puede escribir como

$$P(x) = k(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

donde k es un número real.

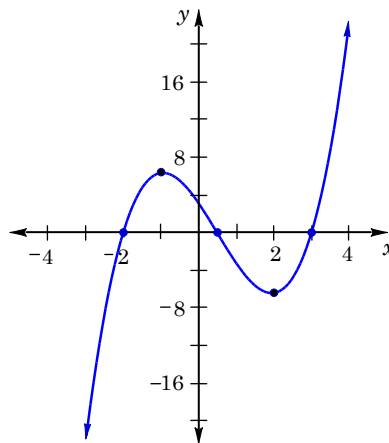
Para dibujar la representación gráfica utilizamos las intersecciones de la gráfica con el eje x , que se obtienen de los ceros del polinomio, estos puntos son

$$(-2, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ y } (3, 0)$$

Adicionalmente podemos obtener información de una pequeña tabla de valores tomando al menos un valor que se encuentre a cada lado de los ceros. Esta tabla puede ser la siguiente

x	-3	-1	0	2	4
y	-21	6	3	-6	21

Al dibujar las intersecciones con el eje x y los puntos de la tabla se obtiene la gráfica de la función



Comportamiento final de un polinomio

La gráfica de un polinomio es una curva suave con puntos que suben y bajan, pero en sus extremos, cuando x tiene valores muy grandes ya sea positivos o negativos, $P(x)$ también tiene valores muy grandes positivos o negativos; es decir que en sus extremos la gráfica se irá hacia arriba si los valores de $P(x)$ son positivos o hacia abajo si los valores de $P(x)$ son negativos.

En realidad el comportamiento final depende solamente del primer término $a_n x^n$ ya que para valores muy grandes de x los otros términos tienen valores relativamente pequeños. El comportamiento final se puede dividir en 4 casos dependiendo del signo de a_n y si el exponente n es par o impar.

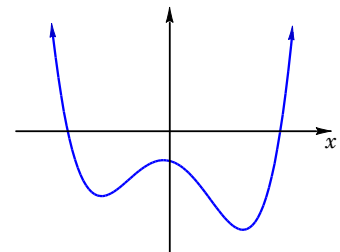
Caso 1: Si n es par y $a_n > 0$

Cuando x toma valores negativos grandes, la gráfica de $P(x)$ toma valores positivos muy grandes y cuando x toma valores positivos grandes la gráfica de $P(x)$ toma valores positivos grandes. En forma simbólica se puede escribir de la forma siguiente

$$\text{Cuando } x \rightarrow -\infty \quad P(x) \rightarrow +\infty$$

$$\text{Cuando } x \rightarrow +\infty \quad P(x) \rightarrow +\infty$$

La figura muestra un polinomio donde n es par y $a_n > 0$



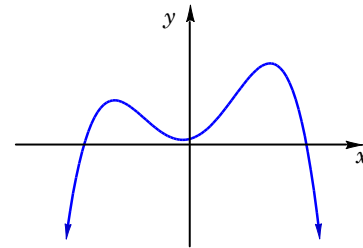
Caso 2: Si n es par y $a_n < 0$

Cuando x toma valores negativos grandes, la gráfica de $P(x)$ toma valores negativos muy grandes y cuando x toma valores positivos grandes la gráfica de $P(x)$ toma valores negativos grandes. En forma simbólica se puede escribir de la forma siguiente

$$\text{Cuando } x \rightarrow -\infty \quad P(x) \rightarrow -\infty$$

$$\text{Cuando } x \rightarrow +\infty \quad P(x) \rightarrow -\infty$$

La figura muestra un polinomio donde n es par y $a_n < 0$

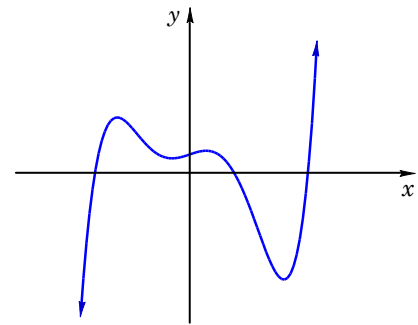
**Caso 3: Si n es impar y $a_n > 0$**

Cuando x toma valores negativos grandes, la gráfica de $P(x)$ toma valores negativos muy grandes y cuando x toma valores positivos grandes la gráfica de $P(x)$ toma valores positivos grandes. En forma simbólica se puede escribir de la forma siguiente

$$\text{Cuando } x \rightarrow -\infty \quad P(x) \rightarrow -\infty$$

$$\text{Cuando } x \rightarrow +\infty \quad P(x) \rightarrow +\infty$$

La figura muestra un polinomio donde n es impar y $a_n > 0$

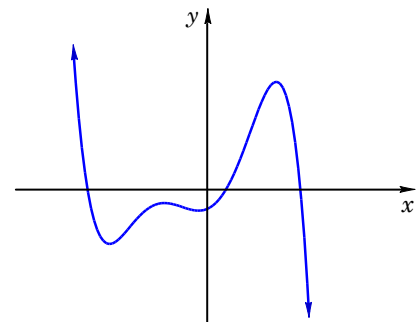
**Caso 4: Si n es impar y $a_n < 0$**

Cuando x toma valores negativos grandes, la gráfica de $P(x)$ toma valores positivos muy grandes y cuando x toma valores positivos grandes la gráfica de $P(x)$ toma valores negativos grandes. En forma simbólica se puede escribir de la forma siguiente

$$\text{Cuando } x \rightarrow -\infty \quad P(x) \rightarrow +\infty$$

$$\text{Cuando } x \rightarrow +\infty \quad P(x) \rightarrow -\infty$$

La figura muestra un polinomio donde n es par y $a_n < 0$

**Multiplicidad de los ceros de un polinomio**

Según el teorema del factor, cuando $(x - c)$ es un factor del polinomio $P(x)$ entonces $x = c$ es una cero de la ecuación $P(x) = 0$.

Ahora, si un polinomio tiene un factor de la forma $(x - c)^k$, entonces se dice que $x = c$ es un cero de multiplicidad k , esto significa que k es un cero o raíz que se repite k veces. Por ejemplo en el polinomio siguiente

$$P(x) = x^3(x - 3)^2(x + 5)(x - 1)^4$$

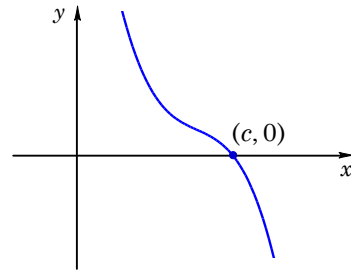
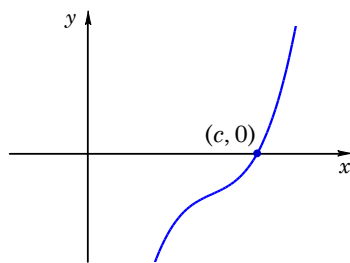
la multiplicidad de los ceros es:

- $x = 0$ es un cero de multiplicidad 3
- $x = 3$ es un cero de multiplicidad 2
- $x = -5$ es un cero de multiplicidad 1
- $x = 1$ es un cero de multiplicidad 4

El comportamiento de la gráfica de un polinomio está relacionada con su la multiplicidad de los ceros y se puede resumir en tres casos

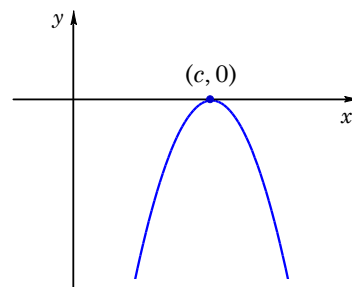
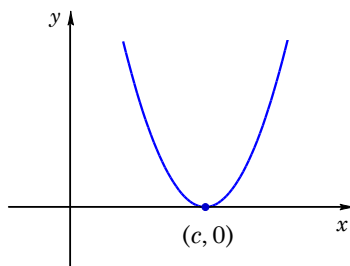
Multiplicidad 1

Si $x = c$ es un cero del polinomio $P(x)$ de multiplicidad 1, es decir que $(x - c)$ es un factor de $P(x)$. Entonces la gráfica del polinomio intersecta al eje x en el punto $(c, 0)$; como se muestra en las figuras siguientes



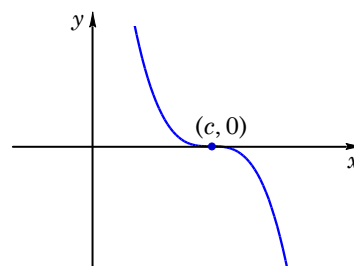
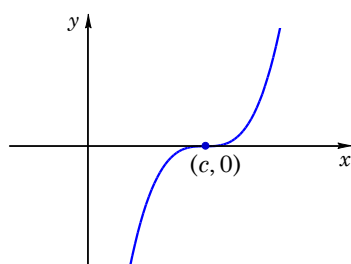
Multiplicidad par

Si $x = c$ es un cero del polinomio $P(x)$ de multiplicidad par, es decir que $(x - c)^k$ es un factor de $P(x)$ que se repite k veces, donde k es un número par. Entonces la gráfica del polinomio es tangente al eje x en el punto $(c, 0)$; como se muestra en las figuras siguientes



Multiplicidad impar mayor que 1

Si $x = c$ es un cero del polinomio $P(x)$ de multiplicidad impar mayor que 1, es decir que $(x - c)^k$ es un factor que se repite k veces, donde k es un número impar, $k > 1$. Entonces la gráfica del polinomio es tangente al eje x y lo intersecta en el punto $(c, 0)$; como se muestra en las figuras siguientes



El siguiente cuadro resume el procedimiento para dibujar la representación gráfica de un polinomio,

PROCEDIMIENTO PARA GRAFICAR UN POLINOMIO

1. Factorice el polinomio, determine los ceros reales y la multiplicidad de cada uno de ellos. Grafique las intersecciones con el eje x .
2. Encuentre la intersección del polinomio con el eje y . Grafique éste punto.
3. Establezca el comportamiento final del polinomio utilizando el signo del coeficiente principal y el grado del polinomio.
4. Comenzando con el comportamiento final en el lado izquierdo trace una curva suave que pase por las intersecciones con los ejes y que cumpla las condiciones de multiplicidad de los ceros. Finalice el trazo con el comportamiento final en el lado derecho.

Ejemplo 2: Gráfica de un polinomio de grado 3

Dibuje la representación gráfica de la función polinomial

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

Solución

En este caso se puede factorizar el polinomio para encontrar sus ceros

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ &= (x^3 + 2x^2) - (4x + 8) \\ &= x^2(x + 2) - 4(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 - 4) \\ &= (x + 2)(x + 2)(x - 2) \\ &= (x + 2)^2(x - 2) \end{aligned}$$

Los ceros se obtienen al igualar el polinomio a cero, es decir

$$(x + 2)^2(x - 2) = 0$$

de donde obtenemos que los ceros del polinomio son

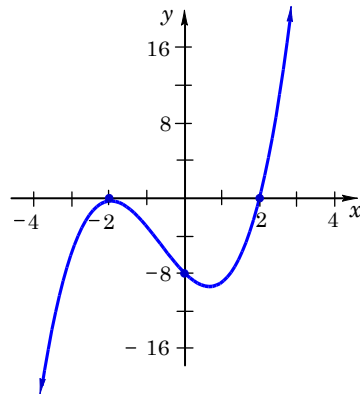
$$x = -2 \text{ de multiplicidad } 2$$

$$x = 2 \text{ de multiplicidad } 1.$$

Por lo tanto las intersecciones con el eje x están en los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

La intersección con el eje y se encuentra haciendo $x = 0$, obteniendo $f(0) = -8$. Por lo que la intersección con el eje y es en el punto $(0, -8)$

La representación gráfica del polinomio inicia con valores de la función negativos cuando x es negativa ya que el grado del polinomio es impar y el coeficiente principal es negativo, debe ser tangente al eje x en $x = -2$ y lo debe cortar en $x = 2$. La siguiente figura muestra la gráfica del polinomio, que se ha construido con la ayuda del programa Scientific Notebook



Ejemplo 3: Gráfica de un polinomio de grado 7

Dibuje la representación gráfica del polinomio

$$P(x) = x^3(x + 3)^2(x - 2)(x - 4)$$

Solución

En este caso el polinomio ya está factorizado, para encontrar los ceros se iguala a cero cada uno de los factores

$$x^3(x + 3)^2(x - 2)(x - 4) = 0$$

Si $x^3 = 0$ se obtiene que $x = 0$ es un cero de multiplicidad 3,

si $(x + 3)^2 = 0$ se obtiene que $x = -3$ es un cero de multiplicidad 2,

si $(x - 2) = 0$ se obtiene que $x = 2$ es un cero de multiplicidad 1 y

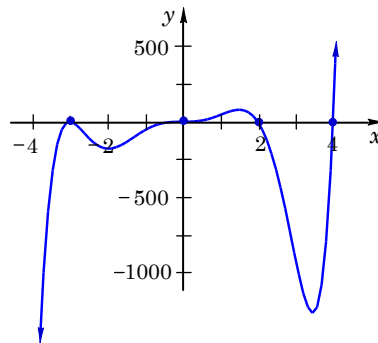
si $(x - 4) = 0$ se obtiene que $x = 4$ es un cero de multiplicidad 1.

La intersección con el eje y se obtiene evaluando $P(0)$

$$P(0) = 0^3(0 + 3)^2(0 - 2)(0 - 4) = 0$$

Como el polinomio es de grado 7 y el coeficiente principal es positivo la representación gráfica debe iniciar con valores de la función negativos cuando x es negativa, debe ser tangente al eje x en $x = -3$, debe ser tangente al eje x en $x = 0$ y cortar al eje x en ese punto, luego intersecta al eje x en $x = 2$ y $x = 4$.

La siguiente figura muestra la representación gráfica del polinomio.



Ejercicios de la sección 4.1

En los ejercicios 1 a 10 dibuje la representación gráfica del polinomio utilizando traslaciones horizontales y verticales, reflexiones y compresiones.

1. $f(x) = x^3 - 3$
2. $f(x) = -x^4 + 2$
3. $f(x) = (x + 3)^3$
4. $f(x) = -(x - 2)^3 + 4$
5. $f(x) = 2x^4 - 4$
6. $P(x) = -3(x + 2)^3$
7. $P(x) = 4(x - 4)^5 + 2$
8. $P(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 3$
9. $P(x) = 2(x + 3)^4 - 3$
10. $P(x) = -4(x - 3)^3 + 5$

En los ejercicios 11 al 20 encuentre los ceros del polinomio y dibuje la representación gráfica.

11. $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$
12. $f(x) = -2(x + 3)(x + 1)(x - 2)$
13. $f(x) = x(x - 1)(x + 1)(x + 2)$
14. $f(x) = x^2(x - 2)(x + 2)$
15. $f(x) = -x(x + 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$
16. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2(x - 2)^2$
17. $f(x) = x(x - 2)^2(x + 3)^3$
18. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3(x - 3)$

$$19. f(x) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{5}{2}\right)^3(x - 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

$$20. f(x) = -3x^3\left(x - \frac{5}{2}\right)^2(x + 1)^3\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

En los ejercicios 21 al 30 factorice el polinomio, encuentre los ceros y dibuje la representación gráfica.

$$21. f(x) = x^4 - 4x^2$$

$$22. x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$23. P(x) = 6x^4 + x^3 - 15x^2$$

$$24. P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

$$25. f(x) = -x^4 + 18x^2 - 81$$

$$26. f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$$

$$27. P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 16x^2 - 24x$$

$$28. f(x) = -x^5 + 16x^3$$

$$29. P(x) = (x^2 - 2x - 3)^2$$

$$30. P(x) = -\frac{1}{3}(2x^4 + 9x^3 - 5x^2)^2$$

31. Se introduce un rebaño de 100 ejemplares de venados en una isla pequeña. Al principio el número de venados aumentan con rapidez; pero con el tiempo disminuyen los recursos alimenticios y la población disminuye. Suponga que el número $N(t)$ de venados después de t años está dado por

$$N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100, \text{ donde } t > 0.$$

- a. Trazar la gráfica de $N(t)$. Halle los valores de t para los que $N(t) > 0$.
- b. ¿Se extingue la población de venados? Si es así, ¿Cuándo desaparecerán?