PROBLEMA RESUELTO 4

Una fábrica vende zapatos a sus distribuidores razón de Q320 el par si el pedido es menor o igual a 50 pares. Si el distribuidor compra más de 50 pares, el precio por par se reduce a razón de 32 centavos por cada par de zapatos adicionales.

a. Construya una función que modele el ingreso del fabricante en términos del tamaño del pedido x

b. Determine la cantidad de zapatos que debe tener el pedido del distribuidor de tal forma que ingreso por pedido del fabricante sea máximo.

Solución

a. Sea x el tamaño del pedido. Si $x \leq 50$ el ingreso por pedido del fabricante se obtiene multiplicando el precio de cada par de zapatos por la cantidad de pares solicitada, es decir

$$I(x) = 320x$$

Ya que en este caso no hay ningún descuento.

Si $x > 50$ se aplica un descuento de Q0.32 por cada par de zapatos. Por ejemplo, si se compran 51 pares, cada par costará $320 - 0.32$, si se compran 52 pares, cada par costará $320 - 2(0.32)$ y así sucesivamente.

Observe que el precio de cada par de zapatos varía linealmente con número de pares de zapatos adicionales. En términos de x, puede expresarse como

$$\text{Precio} = 320 - 0.32(x - 50)$$

Si $x > 50$ el ingreso del fabricante se obtiene multiplicando la cantidad de pares x por el precio de cada par

$$\left[320 - 0.32(x - 50)\right](x)$$

Para establecer el dominio de esta función observe que la cantidad debe ser $x > 50$ y que el precio de cada par no puede ser negativo, es decir

$$320 - 0.32(x - 50) \geq 0$$

$$320 - 0.32x + 16 \geq 0$$

$$-0.32x \geq -336$$

$$x \leq 1050$$

Por lo tanto la función que modela el ingreso del fabricante es

$$I(x) = \begin{cases} 320x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 50 \\ \left[320 - 0.32(x - 50)\right](x) & \text{si} \quad 50 < x \leq 1050 \end{cases}$$

b. Como la segunda fórmula del ingreso en una función cuadrática, para establecer su valor máximo hay que encontrar las coordenadas del vértice

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[320 - 0.32(x - 50)\right](x) \\ &= 320x - 0.32x^2 + 16x \\ &= -0.32x^2 + 336x \end{aligned}$$

Las coordenadas del vértice son

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{336}{2(-0.32)} = 525$$

El ingreso máximo que puede obtener el fabricante es

$$\begin{aligned} I(525) &= \left[320 - 0.32(525 - 50)\right](525) \\ &= (168)(525) \\ &= 88{,}200 \end{aligned}$$

Por lo que la capacidad del canal es máxima cuando la sección del canal es de 10 pulgadas de base por 5 pulgadas de altura.