

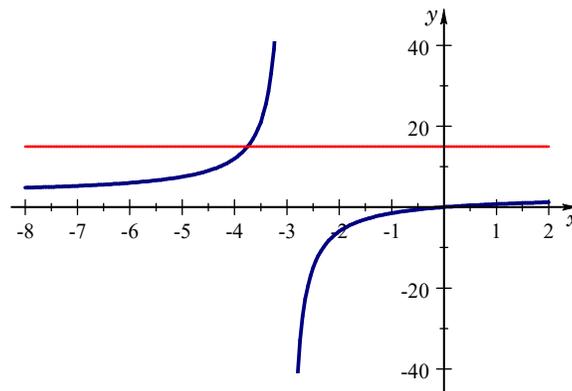
PROBLEMA RESUELTO 4

Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

- Dibuje la representación gráfica e indique si la función es uno a uno.
- Determine el dominio y el rango de f .
- Encuentre la función inversa f^{-1} , indicando su dominio y su rango.
- Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$
- Dibuje la gráfica de f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas

Solución

- La figura siguiente muestra la gráfica de f . La función es uno a uno ya que cualquier recta horizontal la intercepta solamente una vez



- El dominio de f está formado por todos los números en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$ ya que $x = -3$ hace que el denominador sea igual a cero. El rango de f es el dominio de la función inversa y se obtendrá cuando se calcule la función inversa.
- Para obtener la fórmula de la función inversa se despeja x en la ecuación $y = f(x)$

$$y = \frac{2x}{x+3}$$

$$y(x+3) = 2x$$

$$yx - 2x = -3y$$

$$x(y-2) = -3y$$

$$x = \frac{-3y}{y-2}$$

Por lo tanto la función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{-3x}{x-2}$

El dominio de f^{-1} es el conjunto de todos los números en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ ya que $x = 2$ hace que el denominador sea cero.

Entonces el dominio de f^{-1} es el intervalo $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ y el rango es el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$ que es el dominio de f , obtenido en el inciso anterior.

d. Desarrollando la composición de funciones se tiene

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-3x}{x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{-3x}{x-2}\right)}{\left(\frac{-3x}{x-2}\right) + 3} = \frac{\frac{-6x}{x-2}}{\frac{-3x + 3(x-2)}{x-2}} = \frac{\frac{-6x}{x-2}}{\frac{-6}{x-2}} = \frac{-6x(x-2)}{(x-2)(-6)} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x}{x+3}\right) = \frac{-3\left(\frac{2x}{x+3}\right)}{\left(\frac{2x}{x+3}\right) - 2} = \frac{\frac{-6x}{x+3}}{\frac{2x - 2(x+3)}{x+3}} = \frac{\frac{-6x}{x+3}}{\frac{-6}{x+3}} = \frac{-6x(x+3)}{(x+3)(-6)} = x$$

Lo que prueba que la función f^{-1} es la inversa de la función f

e. La gráfica de la función f se muestra en color azul y la de f^{-1} en color rojo, han sido construidas con el programa Scientific Notebook. Observe la simetría de la función y su inversa con respecto a la recta $y = x$

