PROBLEMA RESUELTO 4

Resuelva la ecuación exponencial

$$4^{x+3} + 9^{x+3} = 12 \cdot 6^{x+2}$$

Solución

Observe que en esta ecuación la variable se encuentra como exponente en varios términos que se están sumando, razón por la cual, al aplicar logaritmos a ambos lados de la ecuación no se logra resolver la misma. De hecho, la dificultad de esta ecuación es mayor que la de los ejemplos anteriores y su solución requiere algo de ingenio. Primero observe que $4 = 2^2$, qué $9 = 3^2$ y qué $6 = (2)(3)$. Reemplazando en la ecuación y utilizando las leyes de los exponentes se tiene

$$\begin{aligned}
(2^2)^{x+3} + (3^2)^{x+3} &= 12 \cdot (2 \cdot 3)^{x+2} \\
2^{2x+6} + 3^{2x+6} &= 12 \cdot 2^{x+2} \cdot 3^{x+2} \\
2^6 \cdot 2^{2x} + 3^6 \cdot 3^{2x} &= 12 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^x \cdot 3^x \\
64 \cdot 2^{2x} + 729 \cdot 3^{2x} &= 432 \cdot 2^x \cdot 3^x
\end{aligned}$$

Ahora, dividiendo ambos lados de la ecuación entre 2^{2x} se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{64 \cdot 2^{2x}}{2^{2x}} + \frac{729 \cdot 3^{2x}}{2^{2x}} &= \frac{432 \cdot 2^x \cdot 3^x}{2^{2x}} \\
64 + 729\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} &= 432\left(\frac{3}{2}\right)^x
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ se obtiene la ecuación cuadrática

$$729u^2 - 432u + 64 = 0$$

La cual al resolverla por fórmula cuadrática nos da

$$u = \frac{432 \pm \sqrt{(432)^2 - 4(729)(64)}}{(2)729)} = \frac{432 \pm 0}{1458} = \frac{432}{1458} = \frac{8}{27}$$

Sustituyendo el valor de u para encontrar el valor de x se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{8}{27} &= \left(\frac{3}{2}\right)^x \\
\left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \left(\frac{3}{2}\right)^x \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} &= \left(\frac{3}{2}\right)^x
\end{aligned}$$

De donde la solución de la ecuación es $x = -3$