3.7 Operaciones con funciones

OBJETIVOS

- Efectuar operaciones de suma, resta, producto y división de funciones.
- Obtener el dominio de la función resultante de una operación entre dos funciones.
- Calcular la función compuesta de dos funciones y obtener su dominio.
- Resolver problemas en los cuales se obtiene una función compuesta.

Muchas funciones pueden ser obtenidas a partir de otras funciones, por ejemplo la función $h(x) = x^3 - 6x$ es la resta de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 6x$.

Las operaciones más frecuentes entre funciones son: la suma $f + g$, la resta $f - g$, el producto fg y la división f / g. La definición de estas operaciones se presenta en la tabla siguiente

Operaciones con funciones

Para todos los valores de x, para los cuales $f(x)$ y $g(x)$ están definidas; se definen las operaciones entre ellas de la forma siguiente

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

El dominio de las funciones $f + g$, $f - g$ y fg está formado por todos los números reales que se encuentran en la intersección de los dominios de las funciones f y g.

El dominio de la función f / g está formado por la intersección de los dominios de f y g, excepto aquellos números reales en donde $g(x) = 0$.

Ejemplo 1: Operaciones con funciones

Si $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = 6x - 3$, calcule

a. $(f + g)(3)$ **b.** $(fg)(-1)$ **c.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-3)$

Solución

a. $(f + g)(3) = f(3) + g(3) = \left[2(3)^2 - 4\right] + \left[6(3) - 3\right] = 14 + 15 = 29$

Otra forma en que se puede realizar el cálculo anterior consiste en obtener la suma en forma general y luego evaluarla para $x = 3$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \left[2x^2 - 4\right] + \left[6x - 3\right] = 2x^2 + 6x - 7$

Entonces $(f+g)(3) = 2(3)^2 + 6(3) - 7 = 18 + 18 - 7 = 29$

b. $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x) = (2x^2 - 4)(6x - 3) = 12x^3 - 6x^2 - 24x + 12$

Entonces $(fg)(-1) = 12(-1)^3 - 6(-1)^2 - 24(-1) + 12 = -12 - 6 + 24 + 12 = 18$

c. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x^2 - 4}{6x - 3}$

Entonces: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-3) = \dfrac{2(-3)^2 - 4}{6(-3) - 3} = \dfrac{18 - 4}{-18 - 3} = \dfrac{14}{-21} = -\dfrac{2}{3}$

Ejemplo 2: Operaciones con funciones

Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x}{x+4} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{x-4},$$

a. Calcule $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

b. El dominio de $f+g$, $f-g$, fg.

c. El dominio de f/g.

Solución

a. $(f+g)(x) = \dfrac{3x}{x+4} + \dfrac{x}{x-4} = \dfrac{3x(x-4) + x(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \dfrac{4x^2 - 8x}{(x+4)(x-4)}$

$(f-g)(x) = \dfrac{3x}{x+4} - \dfrac{x}{x-4} = \dfrac{3x(x-4) - x(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \dfrac{2x^2 - 16x}{(x+4)(x-4)}$

$(fg)(x) = \dfrac{3x}{x+4}\cdot\dfrac{x}{x-4} = \dfrac{(3x)(x)}{(x+4)(x-4)} = \dfrac{3x^2}{(x+4)(x-4)}$

$(f/g)(x) = \dfrac{3x}{x+4} \div \dfrac{x}{x-4} = \dfrac{(3x)(x-4)}{(x+4)(x)} = \dfrac{3(x-4)}{x+4}$

b. Para calcular el dominio de las funciones resultantes primero debemos obtener el dominio de las funciones f y g. El dominio de f está formado por todos los números reales excepto $x = -4$ ya que hace cero el denominador es decir que

Dominio de f: $(-\infty,-4) \cup (-4,\infty)$

De forma similar se obtiene que el dominio de g es: $(-\infty,4) \cup (4,\infty)$

El dominio de $f+g, f-g$ y fg es la intersección de los dominios de f y g, es decir todos los números reales excepto $x = -4$ y $x = 4$. En forma de intervalo

$$(-\infty,-4) \cup (-4,4) \cup (4,\infty)$$

c. El dominio de la función f/g es la intersección de los dominios de f y g excepto los números para los cuales $g(x) = 0$. Como $g(x) = \dfrac{x}{x-4} = 0$ cuando $x = 0$, se tiene que el dominio de f/g son todos los números reales exceptuando $x = -4$, $x = 0$ y $x = 4$. En forma de intervalo

$$(-\infty,-4) \cup (-4,0) \cup (0,4) \cup (4,\infty)$$

Composición de funciones

La **composición de funciones** es otra operación entre funciones para obtener nuevas funciones a partir de dos funciones dadas. El proceso consiste en tomar los elementos del rango de una función como el dominio de otra función. La composición de funciones se define en el siguiente cuadro

Composición de funciones

Dadas dos funciones *f* y *g*, la **función compuesta** $g \circ f$ se define como

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

El dominio de la función $g \circ f$ está formado por toda x en el dominio de *f* tal que su imagen $f(x)$ esté en el dominio de la función *g*.

Ejemplo 3: Composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ y $g(x) = \sqrt{4 - x}$, calcule

a. $(f \circ g)(x)$ y calcule su dominio.

b. $(g \circ f)(x)$ y calcule su dominio.

c. $(f \circ g)(-6)$, de dos formas. Método 1: evaluando $g(-6)$ y sustituyendo este resultado en $f(x)$, método 2: calculando $f(g(x)$ y luego sustituyendo $x = -6$.

d. $(g \circ f)(5)$, por los dos métodos descritos en el inciso anterior.

Solución

a. Para calcular la función compuesta se tiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) \\ &= f\left(\sqrt{4 - x}\right) = \sqrt{(\sqrt{4 - x})^2 - 9} \\ &= \sqrt{4 - x - 9} = \sqrt{-5 - x}\end{aligned}$$

El dominio de ésta función está formado por todos los valores de *x* en el dominio de la función *g* tales que $g(x)$ está en dominio de *f*. El dominio de la función *g* se encuentra resolviendo la desigualdad $4 - x \geq 0$

$$\begin{aligned}4 - x &\geq 0 \\ x &\leq 4\end{aligned}$$

Por lo que el dominio de g es $(-\infty,4]$. El dominio de la función f se determina resolviendo la desigualdad $x^2 - 9 \geq 0$, que tiene como solución $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$.

El dominio de la función compuesta está formado entonces por todos los números en $(-\infty,4]$ tales que $g(x) = \sqrt{4 - x}$ está en $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$. Como $\sqrt{4 - x}$ es siempre mayor o igual a cero, es necesario obtener los valores de *x* tales que $\sqrt{4 - x} \geq 3$ y que estén en el intervalo $(-\infty,4]$. Resolviendo la desigualdad se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x} &\geq 3 \\ 4-x &\geq 9 \\ -x &\geq 5 \\ x &\leq -5 \end{aligned}$$

Como todos los números en el intervalo $(-\infty,-5]$ están en $(-\infty,4]$, se tiene que el dominio de la función compuesta es $(-\infty,-5]$

b. Al calcular $(g \circ f)(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\ &= g\left(\sqrt{x^2-9}\right) = \sqrt{4-\sqrt{x^2-9}} \end{aligned}$$

El dominio de la función compuesta está dado por los elementos en el dominio de f, tales que $f(x)$ está en el dominio de g. Del inciso anterior se tiene que el dominio de f es $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$ y el dominio de g es $(-\infty,4]$. El dominio de $(g \circ f)(x)$ está formado entonces por todos los números x en $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$ tales que $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ esté en el intervalo $(-\infty,4]$, es decir

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-9} &\leq 4 \\ x^2-9 &\leq 16 \\ x^2 &\leq 25 \end{aligned}$$

Los valores de x que cumplen ésta última desigualdad están en el intervalo $[-5,5]$. El dominio de la función compuesta es entonces $[-5,-3] \cup [3,5]$.

c. Método 1:

$$(f \circ g)(-6) = f\big(g(-6)\big) = f\left(\sqrt{4-(-6)}\right) = f\left(\sqrt{10}\right) = \sqrt{(\sqrt{10})^2-9} = \sqrt{1}$$

$$(f \circ g)(-6) = 1$$

Método 2:

Como $(f \circ g)(x) = \sqrt{-5-x}$

$$(f \circ g)(-6) = \sqrt{-5-(-6)} = \sqrt{1} = 1$$

d. Método 1:

$$(g \circ f)(5) = g\big(f(5)\big) = g\left(\sqrt{(5)^2-9}\right) = g(4) = \sqrt{4-4} = 0$$

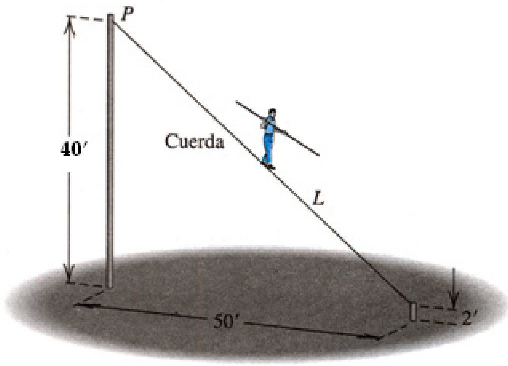
Método 2:

Como $(g \circ f)(x) = \sqrt{4-\sqrt{x^2-9}}$

$$(g \circ f)(5) = \sqrt{4-\sqrt{(5)^2-9}} = \sqrt{4-\sqrt{16}} = \sqrt{4-4} = 0$$

Ejemplo 4: Composición de funciones

Un equilibrista comienza a bajar sobre la cuerda inclinada desde el punto más alto a una velocidad de 1.5 pies por segundo, como se muestra en la figura. Exprese la altura h del equilibrista sobre el suelo como función del tiempo.



Solución

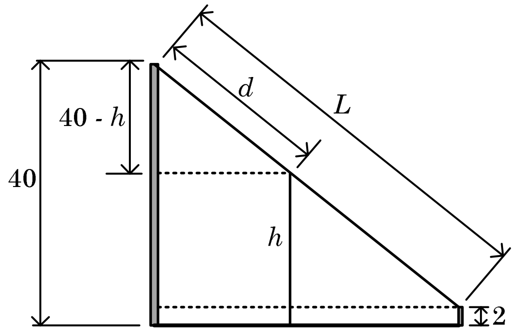
Sea d la distancia recorrida por el equilibrista en el tiempo t, medida desde el punto de partida. Por la fórmula del movimiento rectilíneo se tiene que

$$d(t) = vt = 1.5t$$

Por el teorema de Pitágoras

$$L = \sqrt{50^2 + 38^2} = \sqrt{3944} = 2\sqrt{986}$$

Por semejanza de triángulos se puede obtener una ecuación que relaciona la altura h con la distancia d como se muestra en la figura siguiente



$$\frac{38}{40-h} = \frac{L}{d}$$

Al despejar h y sustituir el valor de L se tiene

$$38d = (40-h)L$$

$$38d = 40L - hL$$

$$hL = 40L - 38d$$

$$h = \frac{40L - 38d}{L} = \frac{40\left(2\sqrt{986}\right) - 38d}{2\sqrt{986}}$$

$$h(d) = \frac{40\sqrt{986} - 19d}{\sqrt{986}}$$

Sustituyendo $d = 1.5t$ en la expresión anterior se tiene una fórmula para h como función del tiempo

$$h(t) = \frac{40\sqrt{986} - 19(1.5t)}{\sqrt{986}}$$

$$h(t) = 40 - \frac{28.5t}{\sqrt{986}}$$

Ejercicios de la sección 3.7

En los ejercicios 1 a 10 encuentre $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, f/g y el dominio de cada una de ellas

1. $f(x) = x^2 - 2x - 15, \quad g(x) = x + 3$

2. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1, \quad g(x) = 3x^2 + 4x$

3. $f(x) = \sqrt{x-3}, \quad g(x) = -2x$

4. $f(x) = \sqrt{x+4}, \quad g(x) = 2x - 1$

5. $f(x) = \sqrt{2x+4}, \quad g(x) = \sqrt{2x+4}$

6. $f(x) = \sqrt{3x-6}, \quad g(x) = \sqrt{6-3x}$

7. $f(x) = \sqrt{4-2x}, \quad g(x) = x^2 - 3x$

8. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = x + 2$

9. $f(x) = \dfrac{x}{x+3}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

10. $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}, \quad g(x) = \sqrt{x} + 1$

Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $g(x) = 2x - 4$, en los ejercicios 11 a 15, evalúe las siguientes operaciones con dichas funciones

11. $(f+g)(5)$

12. $(f-g)(-3)$

13. $(fg)\left(\dfrac{2}{5}\right)$

14. $(f/g)\left(\dfrac{1}{2}\right)$

15. $(g/f)\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

Si $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x}$, en los ejercicios 11 a 15, evalúe las siguientes operaciones con dichas funciones

16. $(f+g)(2)$

17. $(f-g)(1)$

18. $(f+g)(0)$

19. $(f/g)(2)$

20. $(g/f)(2)$

En los ejercicios 21 a 30 calcule $g \circ f$ y su dominio, $f \circ g$ y su dominio

21. $f(x) = x^2 - 11x, \quad g(x) = 2x + 3$

22. $f(x) = -x^3 - 8, \quad g(x) = x + 1$

23. $f(x) = 3x - 5, \quad g(x) = \dfrac{4}{x+1}$

24. $f(x) = \sqrt{x+4}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

25 $f(x) = \dfrac{1}{x-2}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x-3}$

26. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{5-x}$

27. $f(x) = \sqrt{x+5}, \quad g(x) = \sqrt{x-3}$

28. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

29. $f(x) = x^3 - 8, \quad g(x) = \sqrt[3]{x+8}$

30. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}, \quad g(x) = \dfrac{x+4}{x-6}$

En los ejercicios 31 a 40 se da una función $H(x) = (g \circ f)(x)$ Encuentre las fórmulas para $f(x)$ y $g(x)$. (Puede haber varias respuestas).

31. $H(x) = (x-4)^4$

32. $H(x) = \sqrt{4-x^2}$

33. $H(x) = \dfrac{5}{(x-4)^2}$

34. $H(x) = |x^2 + 4|$

35. $H(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + 4}$

Si $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = |x|$ y $h(x) = \dfrac{1}{2x}$ en los ejercicios 36 a 40, evalúe las siguientes operaciones con dichas funciones y encuentre su dominio

36. $(h \circ g \circ f)(x)$

37. $(h \circ f \circ g)(x)$

38. $(f \circ g \circ h)(x)$

39. $(f \circ h \circ g)(x)$

40. $(h \circ g \circ h)(x)$

41. El lado de un cubo aumenta a una rapidez de 0.5 metros por minuto.

a. Exprese el lado del cubo en términos del tiempo t.

b. Exprese la longitud de la diagonal mayor del cubo en función del tiempo.

c. Exprese el volumen del cubo en función del tiempo.

42. Un globo asciende verticalmente a una rapidez constante de 1.5 metros por segundo.

a. Exprese la altura del globo en términos del tiempo t.

b. Exprese la longitud de la cuerda en términos del tiempo.

c. Calcule la longitud de la cuerda cuando el globo está a 30 metros de altura.

43. Un equilibrista sube por una cuerda inclinada del ejemplo 4 a una rapidez constante de 3 pies por segundo.

a. Exprese la distancia recorrida por el equilibrista en términos del tiempo.

b. Exprese la altura a la que se encuentre el equilibrista en términos del tiempo.

44. Un tanque para agua tiene la forma de un cono circular recto invertido 16 pies de altura y 8 pies de radio en la parte superior. Ad depósito está ingresando agua a razón de 2 pies cúbicos por minuto.

a. Exprese el volumen del agua en términos de t.

b. Exprese el volumen de agua en términos del radio de la superficie da agua r.

c. Exprese el radio de la superficie del agua en términos de t.

d. Exprese el área de la superficie del agua en términos de t.

e. Calcule el área de la superficie del agua a los 3 minutos. Un globo está sujeto a una cuerda a una polea en suelo localizada a una distancia de 8 metros de un punto abajo del globo.