3.6 Modelado de funciones

OBJETIVOS

- Resolver problemas en los cuales se debe construir una función que modele una situación real en contextos relacionados con ingeniería.

Función lineal

La ecuación de una recta puede ser expresada como una función, llamada función lineal

Definición de función lineal

Una función de la forma

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales, se llama **función lineal** de variable x.

La gráfica de una función lineal es una línea recta con pendiente m e intercepto con el eje y en el punto $(0, b)$

Ejemplo 1: Gráfica de una función lineal

Encuentre una función lineal con intercepto en el eje y en el punto $(0,4)$ y que $f(-3) = 5$. Dibuje su representación gráfica.

Solución

Se busca una función lineal de la forma $f(x) = mx + b$, como intercepta al eje y en el punto $(0,4)$, se tiene que $b = 4$. Por otro lado, si $f(-3) = 5$ se tiene que

$$5 = m(-3) + b$$

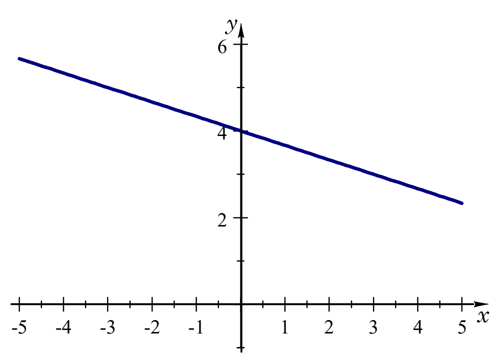
$$5 = m(-3) + 4$$

$$1 = -3m$$

$$m = -\frac{1}{3}$$

Por lo que la función lineal buscada es $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

La representación gráfica se muestra en la siguiente figura



Ejemplo 2: Una aplicación de costos e ingresos

Una empresa dedicada a la renta de camiones ha comprado un camión a un precio de Q156,000, y el camión tiene un costo de mantenimiento de Q54 diarios.

a. Encuentre una ecuación lineal que relacione el costo total C del camión con el tiempo t expresado en días.

b. Si el camión se alquila a un precio de Q440 diarios, encuentre una ecuación lineal que relacione el Ingreso I con el tiempo t en días suponiendo que el camión siempre está rentado.

c. Encuentre el tiempo t, en días, necesario para que la empresa recupere la inversión realizada en el camión.

d. Dibuje la representación gráfica de los ingresos y los costos en un mismo rectángulo de visualización

Solución

a. Cuando la empresa ha gastado Q156,000 en la compra del camión, es decir que el punto está en la ecuación de costos C. Por otro lado, los costos diarios son Q54, lo que indica que los costos totales aumentan Q54 por cada día transcurrido; por lo tanto la pendiente de la recta de costos es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{54}{1} = 54$$

Teniendo la pendiente y un punto se puede obtener la ecuación lineal para los costos

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$C - 156{,}000 = 54(t - 0)$$

$$C = 54t + 156{,}000$$

b. Para el ingreso es ya que no se ha rentado el camión. Como el valor de la renta por día es de Q440, la ecuación del ingreso es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente, por lo que la ecuación es

$$I = 440t$$

c. La empresa recuperara la inversión cuando los ingresos sean iguales a los costos, es decir que

$$I = C$$

$$440t = 54t + 156{,}000$$

Despejando t en la ecuación anterior se tiene

$$440t - 54t = 156{,}000$$

$$386t = 156{,}000$$

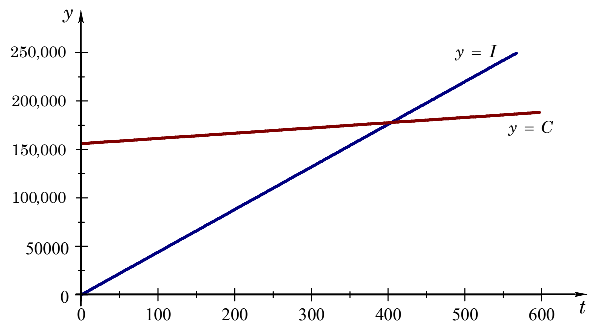
$$t = \frac{156{,}000}{386} = 404.145$$

Es decir que la empresa recuperará la inversión en aproximadamente 404 días

d. La siguiente figura muestra las gráficas de ingresos y costos en un mismo plano. Para dibujar ésta gráfica se pueden encontrar dos puntos para cada recta dándole valores a t.

La gráfica utiliza solo el primer cuadrante ya que el tiempo no puede ser negativo.

La recta en color azul representa los costos y la recta en color rojo representa los ingresos.



Muchas de las fórmulas utilizadas en matemática están expresadas como una función, por ejemplo la fórmula

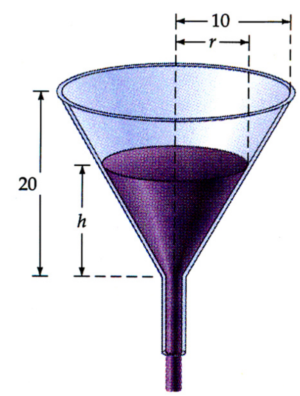
$$A(r) = 4\pi r^2$$

Es una función llamada A, que expresa que el área de una esfera depende de la variable r, donde r es la variable independiente y representa al radio de la esfera. El dominio de la función está dado por todos los valores que puede tomar r, en el contexto del problema.

Así como la función anterior, se pueden construir muchas funciones que permitan modelar alguna situación en particular como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3: Aplicaciones de las funciones

Un cono regular recto invertido tiene 10 pulgadas de radio y 20 pulgadas de altura, como se muestra en la figura. El cono contiene una sustancia química que está saliendo del mismo, de tal forma que el volumen dentro del cono está cambiando continuamente.



a. Escriba el radio r del volumen de la sustancia en términos de la altura h

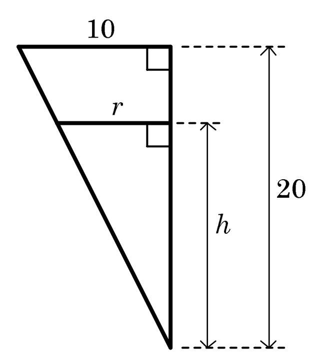
b. Escriba el volumen V del volumen líquido como función de la altura h.

c. Obtenga el dominio de la función.

d. Calcule la altura para la cual el volumen del líquido es la mitad del volumen total del recipiente.

Solución

a. Para expresar el radio r como en términos de la altura se debe utilizar una relación de semejanza entre triángulos. De la figura a la derecha se tiene



$$\frac{r}{10} = \frac{h}{20}$$

$$r = \frac{10h}{20} = \frac{h}{2}$$

b. El volumen del líquido es el volumen de un cono de radio r y altura h, es decir

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Sustituyendo $r = \dfrac{h}{2}$ se obtiene la función para el volumen en términos de h

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h^2}{4}\right)h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Es decir que la función que expresa el volumen en función de la altura es

$$V(h) = \frac{\pi}{12}h^3$$

c. Puesto que la altura del líquido depende de las dimensiones del recipiente donde está colocado, el cual tiene una altura de 20 pul, se tiene que $0 \le h \le 20$. Por lo tanto el dominio de la función es el intervalo $[0, 20]$

d. Para responder ésta última pregunta primero se calcula el volumen total del recipiente

$$V_T = \frac{1}{3}\pi(10)^2(20) = \frac{2000\pi}{3}$$

La mitad del volumen total es $\dfrac{V_T}{2} = \dfrac{2000\pi}{6} = \dfrac{1000\pi}{3}$

Sustituyendo este volumen en la función y despejando h

$$\frac{1000\pi}{3} = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{12(1000\pi)}{3\pi} = h^3$$

$$\sqrt[3]{4000} = h$$

$$h \approx 15.87$$

Cuando el líquido tiene un volumen igual a la mitad de la capacidad del recipiente la altura es 15.87 pulgadas.

Ejemplo 4: Ingresos por derecho de autor

Cierto libro se vende en a un precio de Q120. El autor recibe derechos del 8% por los primeros 10,000 ejemplares vendidos, 12% por los siguientes 10,000. Si las ventas pasan de los 20,000 ejemplares el autor recibe un bono de Q50,000 y 20% de comisión.

a. Encuentre una función definida por varias fórmulas que exprese el ingreso I del autor en términos del número de libros vendidos x.

b. Encuentre los ingresos si el autor vende 25,400 ejemplares.

c. Dibuje la gráfica de la función.

Solución

a. Los ingresos totales de la editorial son $120x$, donde x es el número de libros vendidos; del total de ingresos le corresponde al autor el 8% cuando las ventas son menores o iguales a 10,000 ejemplares.

$$\begin{aligned} I(x) &= 0.08(120)x, \quad 0 \le x \le 10{,}000 \\ &= 9.6x \end{aligned}$$

Si las ventas son mayores de 10,000 pero menores o iguales a 20,000 el autor recibe una comisión del 12%. Esta comisión es solo por las ventas adicionales ya que los primeros 10,000 tienen comisión del 8%. Por lo que el ingreso en este caso es

$$\begin{aligned} I(x) &= 96{,}000 + 0.12((120)(x - 10{,}000), \quad 10{,}000 < x \le 20{,}000 \\ &= 96{,}000 + 14.4(x - 10{,}000) \end{aligned}$$

Finalmente, si se venden más de 20,000 ejemplares el autor recibe la comisión de 8% por los primeros 10,000 más la comisión del 12% por los siguientes 10,000, un bono de Q50,000 y la comisión del 20% por las ventas que pasen los 20,000 ejemplares. En éste caso el ingreso es

$$\begin{aligned} I(x) &= 96{,}000 + 144{,}000 + 50{,}000 + 0.2(120)(x - 20{,}000), \quad x > 20{,}000 \\ &= 290{,}000 + 24(x - 20{,}000) \end{aligned}$$

Al integrar las tres fórmulas en una sola función se obtiene

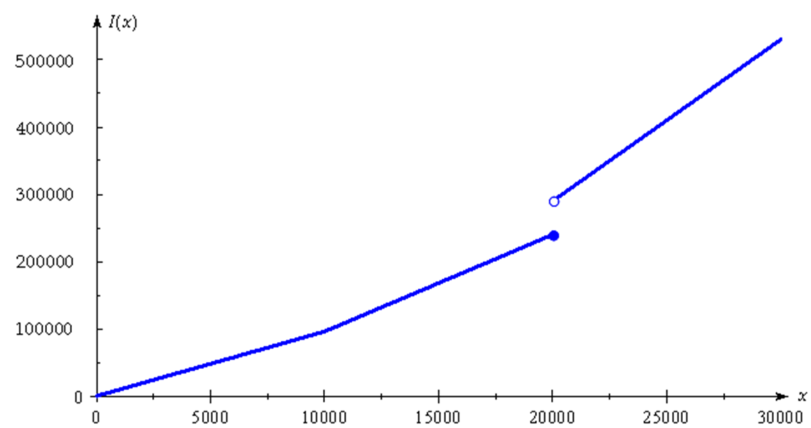
$$I(x) = \begin{cases} 9.6x & \text{si} \quad 0 \le x \le 10{,}000 \\ 96{,}000 + 14.4(x - 10{,}000) & \text{si} \quad 10{,}000 < x \le 20{,}000 \\ 290{,}000 + 24(x - 20{,}000) & \text{si} \quad x > 20{,}000 \end{cases}$$

b. Si se venden 25,400 libros el ingreso se calcula evaluando en la tercera fórmula ya que x es mayor de 20,000.

$$\begin{aligned} I(25{,}400) &= 290{,}000 + 24(25{,}400 - 20{,}000) \\ &= 419{,}600 \end{aligned}$$

Por lo que el autor tendrá ingresos de Q419,600 si se venden 25,400 libros.

c. Para dibujar la gráfica de la función se puede observar que cada una de las fórmulas es una función lineal, por lo cual la gráfica está compuesta por 3 segmentos rectos; a cada uno de los cuales les corresponde una ecuación diferente.



Ejercicios de la sección 3.6

1. El costo total para un fabricante está formado por costos fijos de Q8,000 más costos de producción de Q50 por unidad. Exprese el costo total C en términos del número x de unidades producidas. Dibuje la gráfica y calcule el costo total de producir 150 unidades.

2. Un plomero cobra Q100 por visita a domicilio más Q20 por hora de trabajo. Exprese el costo C de un trabajo que requiere x horas de tiempo, $0 \le x \le 8$. Si el plomero hizo un cobro de Q240, ¿cuántas horas tardó el trabajo?

3. Una empresa de alquiler de autos cobra Q320 por día más Q1.50 por kilómetro recorrido. Exprese el costo del alquiler de un auto en términos del número x de días. Calcule el costo al rentar un auto por 20 días.

4. La afiliación a un club privado de tenis cuesta Q1000 al año y le da derecho al socio de

utilizar la cancha de juego por Q8 la hora. En otro club la filiación cuesta Q800 por año y el costo por hora de cancha es de Q12. Calcule cuántas horas debe jugar al año un tenista para que el costo anual sea el mismo en ambos clubes.

5. Una persona compra un horno de microondas por un valor de Q1,500. Si después de 5 años de uso el horno se vende por un valor de Q500. Exprese el valor V del horno en términos del tiempo t expresado en años, como una ecuación lineal. Estime el valor del horno a los dos años de uso.

6. Un visitador médico tiene un salario mensual de Q3,000 más una comisión del 5% sobre las ventas realizadas. Escriba una ecuación lineal que exprese el sueldo mensual S del vendedor en términos de las ventas mensuales x. Si en un mes recibió un sueldo de Q7,500, calcule el valor de las ventas realizadas.

7. Una temperatura de 0º Celsius es equivalente a 32º Fahrenheit, mientras que una temperatura de 100ºC es equivalente a una temperatura de 212ºF. Encuentre una ecuación lineal que exprese la relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit.

8. La autopista de Escuintla al Puerto de San José tiene una longitud aproximada de 40 kilómetros y una pendiente aproximada de 0.9%. Encuentre una ecuación lineal que exprese la altura sobre el nivel del mar H de la carretera, en metros. En términos de la distancia x en kilómetros medida desde el puerto a Escuintla.

9. La presión atmosférica al nivel del mar es de 15 lb/pul^2, mientras que a una profundidad de 20 pies la presión sobre un buzo es de 23.7 lb/pul^2. Obtenga una ecuación lineal que exprese la presión sobre un buzo a una profundidad h en pies. Calcule la presión a una profundidad de 100 pies. Si la presión máxima soportada por un buzo es aproximadamente de 100 lb/pul^2. ¿Hasta que profundidad pueden descender?

10. Un rectángulo tiene longitud x cm y un perímetro de 50 cm.

a. Escriba el ancho y en función de x.

b. Escriba el área A del rectángulo como función de x. ¿Cuál es el dominio de ésta función?

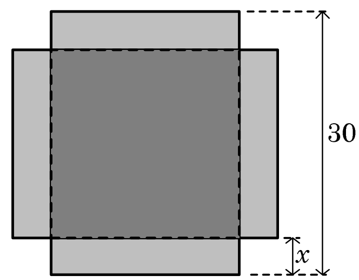
11. La suma de dos números es 20. Si x representa a uno de los números.

a. Escriba el segundo número en términos de x.

b. Escriba el producto P de los números como función de x. Indique el dominio de la función.

12. Un automóvil nuevo tiene un valor de Q220,000. Suponiendo que el auto se deprecia a razón de Q20,000 por año durante los primeros 8 años. Escriba el valor V del auto en función del tiempo t expresado en años.

13. De una lámina cuadrada de 30 por 30 pulgadas, se va a construir una caja rectangular cortando cuadrados iguales en cada una de las esquinas de x pulgadas por lado. Exprese el volumen de la caja como función de x y establezca el dominio de la función.



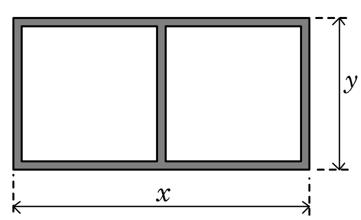
14. Un tanque de acero para almacenar gas propano será construido en forma de cilindro circular recto de 5 metros de largo y con una semiesfera en cada extremo. Exprese el volumen del tanque en función del radio r del cilindro.

15. En un terreno rectangular de 100 m^2, se desea construir dos corrales iguales para aves, como se muestra en la figura.

a. Exprese el ancho del corral y en términos del largo x.

b. Escriba la longitud total del material de cercado como una función de x.

c. Si el material de cercado tiene un costo de Q25 por metro lineal. Exprese el costo total de cercar los corrales en términos de x.



16. Se quiere construir una pecera en forma de caja rectangular con una capacidad de 1 metro cúbico de agua. Si la pecera debe tener una altura de 40cm.

a. Exprese el ancho y de la pecera en términos de su largo x.

b. Exprese la cantidad total de vidrio que se necesita para construir la pecera como función de x. ¿Cuál es el dominio de ésta función?

17. Se inscribe un triángulo rectángulo dentro de un semicírculo de radio 8 cm. Si las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo miden x cm y y cm.

a. Exprese y en términos de x.

b. Exprese el área que queda dentro del semicírculo y fuera del triángulo rectángulo como una función de x. ¿Cuál es el dominio de ésta función?

18. Se inscribe un cilindro circular recto dentro de un cono de 3 cm de radio y 15 cm de altura.

a. Exprese la altura h del cilindro en términos de su radio r.

b. Exprese el volumen del cilindro como una función de r. ¿Cuál es el dominio de esta función?

19. En Guatemala el costo de la electricidad por kWh está distribuido aproximadamente en la forma siguiente: si un consumidor consume 50 kWh o menos en un mes, la tarifa es de Q0.55 por kWh. Si consume más de 50 kWh pero no más de 100 kWh la tarifa es de Q0.78 por kWh. Si la persona consume más de 100 kWh pero no más de 300kWh, la tarifa es de Q1.60 por kWh. Finalmente si el usuario consume más de 300kWh, la tarifa es de Q1.85 por kWh. Construya una función que exprese el precio del kWh en términos del consumo en kWh. Dibuje su representación gráfica.

20. Para los datos del problema anterior, construya una función que exprese el costo mensual de energía que paga un usuario en términos del consumo en Kwh. Dibuje su representación gráfica.