3.5 Gráficas de funciones

OBJETIVOS

- Determinar si una función es par o impar.
- Dibujar la gráfica de una función utilizando las propiedades de traslación, compresión y estiramiento y reflexiones en los ejes de coordenadas.
- Dibujar la gráfica de una función definida por varias fórmulas.

Función par y función impar

Algunas funciones pueden ser clasificadas como **pares** o **impares.** La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

FUNCIÓN PAR Y FUNCIÓN IMPAR

La función f es una **función par** si

$$f(-x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

La función f es una **función impar** si

$$f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Ejemplo 1: Funciones pares e impares

Determine si las funciones dadas son pares, impares o ninguna de las dos

a. $f(x) = 2x^3$ **b.** $g(x) = |x| + 5$ **c.** $h(x) = 3x^3 - 2x^2$

Solución

Para establecer si una función es par o impar, se reemplaza x por $-x$ y se simplifica la expresión resultante

a. $f(-x) = 2(-x)^3 = 2(-x^3) = -2x^3 = -f(x)$

Esta es una función impar pues $f(-x) = -f(x)$

b. $g(-x) = |-x| + 5 = |x| + 5 = g(x)$

Esta es una función par pues $g(-x) = g(x)$

c. $h(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x)^2 = 3(-x^3) - 2x^2 = -3x^3 - 2x^2$

Esta función no es par pues $h(-x) \neq h(x)$, tampoco es impar pues $h(-x) \neq -h(x)$

Traslaciones de gráficas

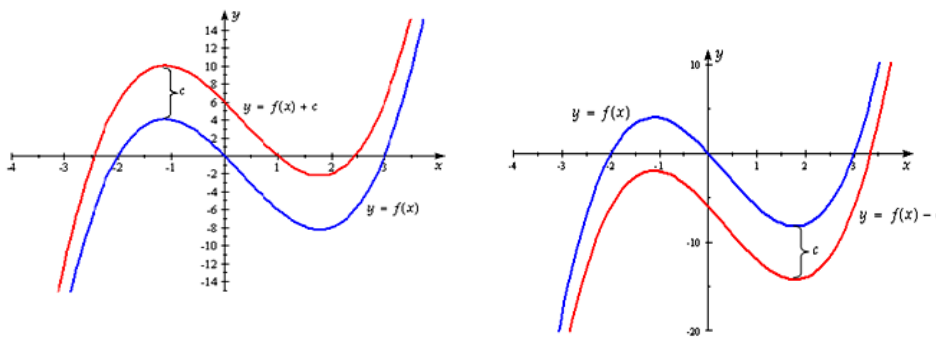
La gráfica de una función $f(x)$ puede ser igual a la gráfica de otra función $g(x)$, pero con una posición diferente en el plano xy. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2$ es igual a la gráfica de la función $g(x) = x^2$ trasladada 2 unidades hacia abajo. Cuando esto sucede se dice que la gráfica está trasladada en el plano, usando **traslación vertical** o una **traslación horizontal**.

Traslación vertical

La traslación vertical permite desplazar hacia arriba o hacia abajo la gráfica de una función

> **TRASLACIÓN VERTICAL**
>
> Si f es una función y c es una constante positiva, entonces
>
> - La gráfica de $y = f(x) + c$ se obtiene trasladando c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.
> - La gráfica de $y = f(x) - c$ se obtiene trasladando c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.

La siguiente figura muestra la traslación vertical de una gráfica

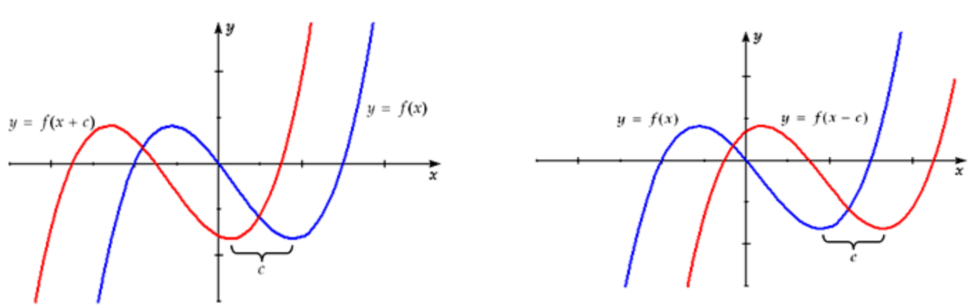


Traslación horizontal

Las traslaciones horizontales permiten trasladar la gráfica de una función hacia la derecha o hacia la izquierda

> **TRASLACIÓN HORIZONTAL**
>
> Si f es una función y c es una constante positiva, entonces
>
> - La gráfica de $y = f(x + c)$ se obtiene trasladando c unidades hacia la izquierda la gráfica de $y = f(x)$.
> - La gráfica de $y = f(x - c)$ se obtiene trasladando c unidades hacia la derecha la gráfica de $y = f(x)$.

La figura que sigue ilustra las traslaciones horizontales hacia la izquierda y hacia la derecha



Ejemplo 2: Traslaciones horizontales y verticales

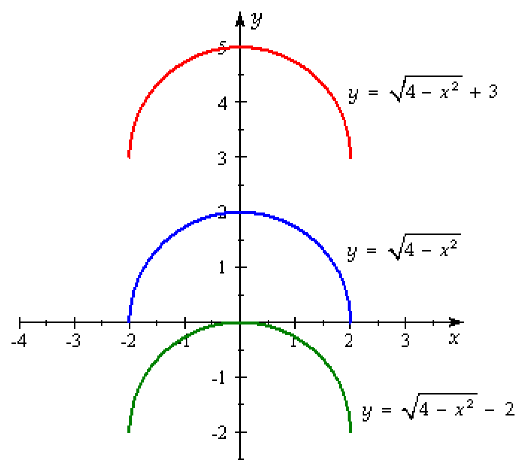
Dada la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, dibuje la representación gráfica de la función que se indica para cada valor de c en un mismo sistema de coordenadas.

a. $y=f(x)+c$, para $c=-2,3$

b. $y=f(x-c)$, para $c=-3,2$

Solución

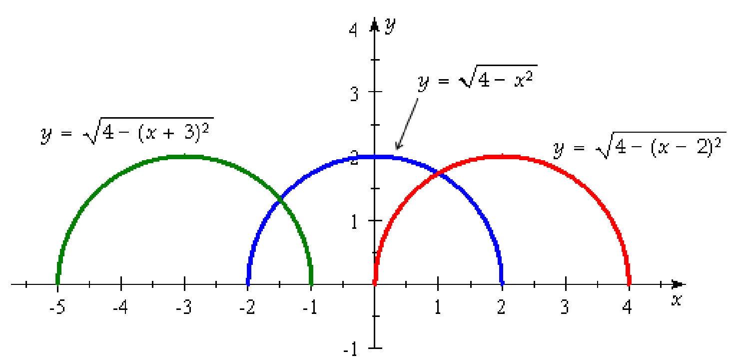
a. La gráfica de la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, es la mitad de una circunferencia de radio 2 y centro en el origen, se muestra en color azul en la figura. Para $c=3$ se obtiene $f(x)=\sqrt{4-x^2}+3$, que es la misma gráfica desplazada 3 unidades hacia arriba, se muestra en color rojo. Para $c=-2$ se obtiene $f(x)=\sqrt{4-x^2}-2$, que es la misma gráfica desplazada 2 unidades hacia abajo, se muestra en color verde.



b. La función $y=f(x-c)$, en éste problema queda como $f(x)=\sqrt{4-(x-c)^2}$. Observe que se ha sustituido $x-c$ en la función dada $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

Para $c=2$ se obtiene $f(x)=\sqrt{4-(x-2)^2}$. La gráfica se dibuja desplazando 2 unidades hacia la derecha la función original y se muestra en color rojo.

Para $c=-3$ se obtiene $f(x)=\sqrt{4-(x+3)^2}$, que tiene como gráfica la misma semicircunferencia, desplazada 3 unidades hacia la izquierda y se muestra en color verde.



Reflexiones de una gráfica

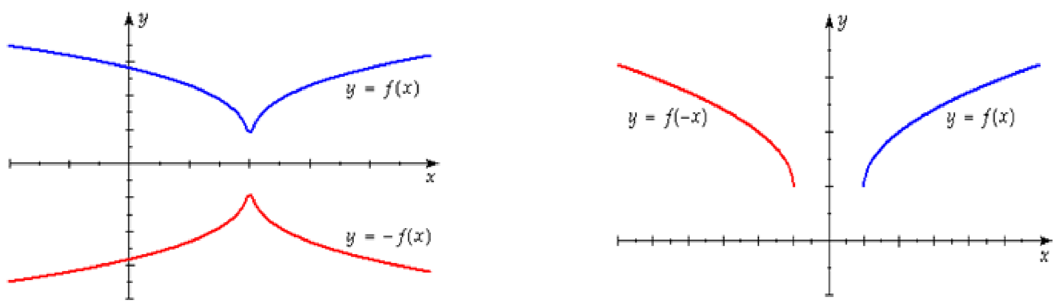
Con las transformaciones apropiadas la gráfica de una función se puede reflejar sobre el eje x o sobre el eje y según la definición siguiente

REFLEXIONES

Si f es una función, entonces

- La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene reflejando en el eje x la gráfica de la función $y = f(x)$.
- La gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene reflejando en el eje y la gráfica de la función $y = f(x)$.

La figura siguiente muestra las reflexiones en los ejes de coordenadas



Reflexión en el eje *x* **Reflexión en el eje *y***

Estiramiento y compresión vertical de una gráfica

Estiramiento y compresión vertical

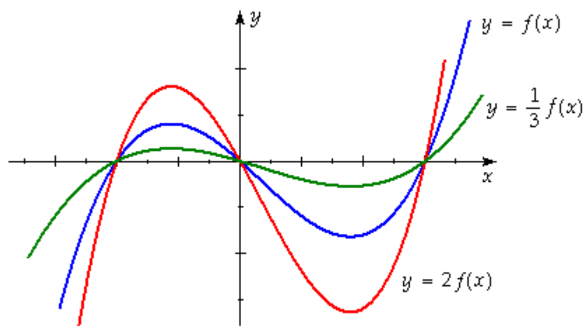
Cuando una función $y = f(x)$ se multiplica por una constante $c > 0$, para obtener la función $y = cf(x)$, la gráfica se estira o se comprime verticalmente, manteniendo sus intersecciones en el eje x, como se indica en el cuadro siguiente

ESTIRAMIENTO Y COMPRESIÓN VERTICAL

Si f es una función, entonces

- La gráfica de $y = cf(x),\ c > 1$; se obtiene estirando c veces la gráfica de la función $y = f(x)$ en sentido vertical.
- La gráfica de $y = cf(x),\ 0 < c < 1$; se obtiene comprimiendo c veces la gráfica de la función $y = f(x)$ en sentido vertical.

La figura siguiente ilustra la compresión vertical de las gráficas.



Estiramiento y compresión horizontal

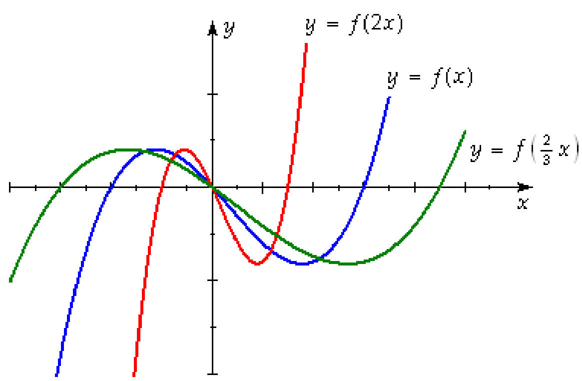
Cuando en una función $y = f(x)$, la variable x se multiplica por una constante $c > 0$, se produce un estiramiento o una compresión horizontal en la gráfica; como se indica en el cuadro siguiente

ESTIRAMIENTO Y COMPRESIÓN HORIZONTAL

Si f es una función, entonces

- La gráfica de $y = f(cx)$, $0 < c < 1$; produce un estiramiento de $1/c$ veces en la gráfica de la función $y = f(x)$ en sentido horizontal.
- La gráfica de $y = f(cx)$, $c > 1$; produce una compresión de c veces en la gráfica de la función $y = f(x)$ en sentido vertical.

Observe que la constante c tiene un efecto inverso en el sentido horizontal que en el vertical ya que un valor de c menor que 1, produce un estiramiento horizontal, mientras que en sentido vertical produce una compresión. La figura siguiente ilustra el estiramiento y compresión horizontal.



Ejemplo 3: Reflexiones y compresiones horizontales y verticales

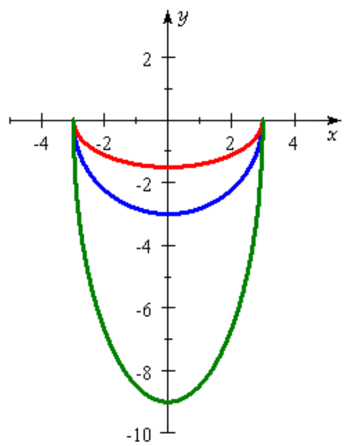
Dada la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, dibuje la representación gráfica de la función que se indica para cada valor de c en un mismo sistema de coordenadas.

a. $y = -cf(x)$, para $c = \frac{1}{2}, 1, 3$

b. $y = f(cx) + 1$, para $c = \frac{1}{2}, 1, 3$

Solución

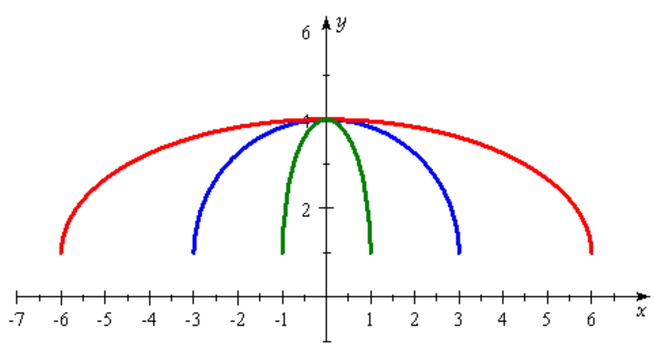
a. La gráfica de la función $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$ es la mitad inferior de una circunferencia con centro en el origen y radio 3, se muestra en color azul en la figura. La gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$ es la misma circunferencia comprimida a la mitad (factor 2) y se muestra en color rojo. La gráfica de $f(x) = -3\sqrt{9-x^2}$ amplifica 3 veces la semicircunferencia pues tiene un factor 3, se muestra de color verde en la figura siguiente



b. La constante c en la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{9-(cx)^2}$ produce una compresión o estiramiento horizontal sobre la gráfica de la función original $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, que es la mitad superior de una circunferencia de radio y centro en el origen. Para $c = 1$, se obtiene la función $g(x) = \sqrt{9-x^2} + 1$, que es una semicircunferencia desplazada una unidad hacia arriba, se muestra de color azul en la figura.

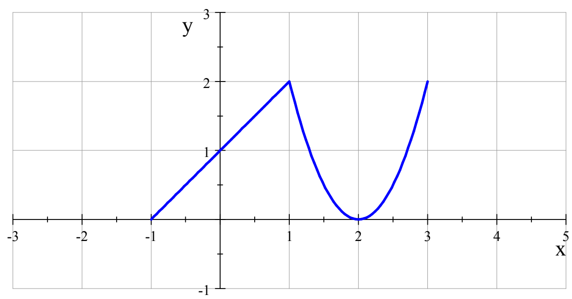
Para $c = \frac{1}{2}$ se obtiene $g(x) = \sqrt{9-\left(\frac{1}{2}x\right)^2} + 1$; siendo la gráfica una semicircunferencia estirada al doble y desplazada una unidad hacia arriba, que se muestra en color rojo en la figura.

Para $c = 3$ se obtiene la función $g(x) = \sqrt{9-(3x)^2} + 1$, cuya gráfica es una semicircunferencia comprimida a una tercera parte y desplazada una unidad hacia arriba. Se muestra en color verde en la figura siguiente.



Ejemplo 4: Transformaciones de una función dada su gráfica

La figura muestra la gráfica de una función f.

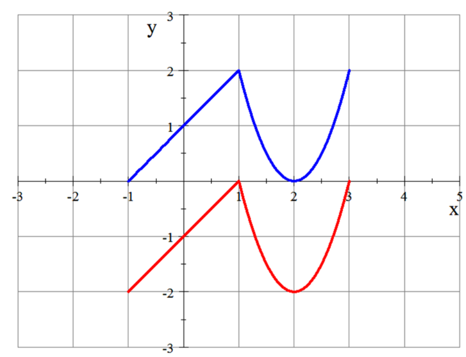


A partir de ella construya la gráfica de las funciones que se indican

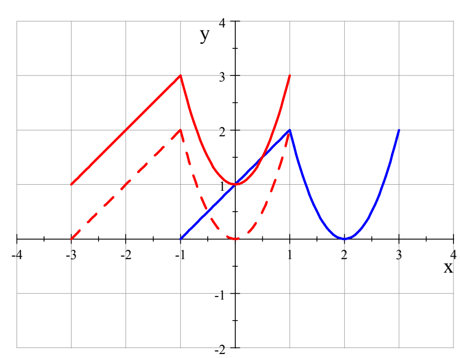
a. $y = f(x) - 2$ **b.** $y = f(x+2)+1$ **c.** $y = -f(2x) - 1$

Solución

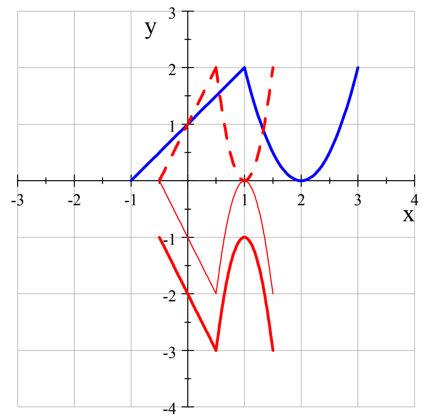
a. La gráfica de $y = f(x) - 2$ se obtiene desplazando la gráfica original 2 unidades hacia abajo. En color azul se muestra la gráfica de la función dada y en color rojo la gráfica transformada.



b. La gráfica $y = f(x+2)+1$ tiene un desplazamiento de 2 unidades hacia la izquierda y de una unidad hacia arriba. En color azul se muestra la gráfica dada, en línea roja discontinua la traslación hacia la izquierda y la gráfica final en color rojo



c. La gráfica de $y = -f(2x) - 1$ tiene 3 transformaciones, la primera es una compresión horizontal con factor 2, la segunda es una reflexión en el eje x y la tercera es un desplazamiento hacia debajo de una unidad. Las dos primeras transformaciones se muestran con línea discontinua y la gráfica final en línea roja continua.



Funciones definidas por varias fórmulas

Muchas de las funciones de uso práctico están definidas utilizando varias fórmulas y son llamadas funciones seccionadas o funciones definidas por partes, en estos casos a cada fórmula le corresponde un dominio diferente y cada uno de ellos es dado en forma de desigualdad.

Ejemplo 5: Función definida por varias fórmulas

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si} \quad -2 < x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a. Calcule: (i) $f(-5)$, (ii) $f(2)$, (iii) $f(2 + h)$, $h > 0$

b. Dibuje la gráfica de la función

Solución

Observe que la función está definida Por tres fórmulas, la primera $f(x) = -1$, que tiene como dominio el intervalo $(-\infty, -2]$. La segunda fórmula es $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, que tiene como dominio el intervalo $(-2, 2]$. La tercera fórmula es $f(x) = x - 1$, que tiene dominio $(2, \infty)$.

a. Para evaluar una función definida por varias fórmulas hay que tener cuidado de elegir la fórmula apropiada ya que un número solo puede ser evaluado en una fórmula.

(i) Como $x = -5$ está en el intervalo $(-\infty, -2]$ que es el dominio de la primera fórmula.

$$f(-5) = -1$$

(ii) Ya que $x = 2$ se encuentra en el intervalo $(-2, 2]$ que es el dominio de la segunda fórmula.

$$f(2) = \sqrt{4 - (2)^2} = 0$$

(iii) El número $2 + h$ es mayor que 2 pues h es positivo, por lo tanto está en el intervalo $(2, \infty)$ que es el dominio de la tercera fórmula y es ahí donde debe evaluarse, entonces

$$f(2 + h) = (2 + h) - 1 = 1 + h$$

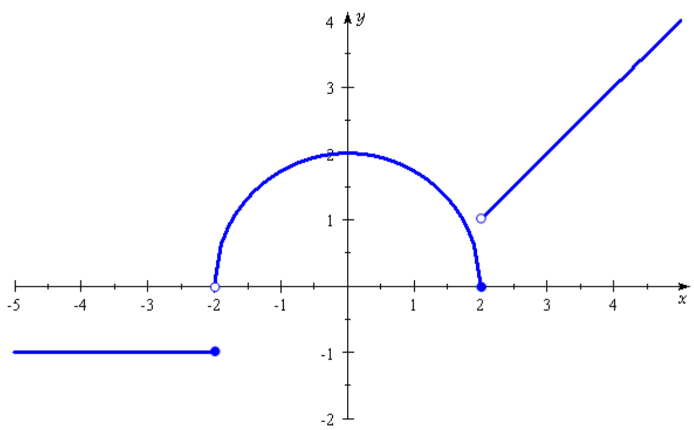
b. Para dibujar la gráfica de una función con varias fórmulas se utilizan los conceptos de transformaciones de las gráficas desarrollados en ésta sección, tomando en cuenta que a cada parte del dominio en la función le corresponde una gráfica diferente.

En este ejemplo, la gráfica de $y = -1$ es una recta horizontal que se dibuja en el intervalo $(-\infty, -2]$, como el intervalo es cerrado en el lado derecho esta parte de la gráfica se representa con un punto sólido en el extremo derecho.

En el intervalo $(-2, 2]$ se dibuja la gráfica $y = \sqrt{4 - x^2}$ que es la mitad superior de una circunferencia de radio 2 con centro en el origen. El extremo derecho se dibuja con un punto vacío ya que el intervalo es abierto en ese lado y en el lado derecho se utiliza un punto sólido ya que el intervalo es cerrado en 2.

En el intervalo $(2, \infty)$ se dibuja la gráfica $y = x - 1$, con un punto vacío en el lado izquierdo que corresponde al intervalo abierto en 2.

La figura siguiente muestra la gráfica resultante



Ejercicios de la sección 3.5

En los ejercicios 1 a 7 determine si la función es par, impar o ninguna de éstas

1. $f(x) = 3x^2 - 2$

2. $f(x) = 2x^3 - 2x$

3. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

4. $f(x) = |x + 4|$

5. $G(x) = |x| - 2$

6. $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

7. $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$

8. Si $f(x) = x^2$, dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f(x) + 2$

c. $f(x) - 3$ **d.** $f(x) + \dfrac{3}{2}$

9. Si $f(x) = \sqrt{x}$, dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f(x - 1)$

c. $f(x + 3)$ **d.** $f(x + 1) - 2$

10. Si $f(x) = |x|$, dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $-f(x)$

c. $-f(x + 1)$ **d.** $-f(x + 1) + 2$

11. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $-f(x)$

c. $-f(x + 1)$ **d.** $-f(x + 1) + 2$

12. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $3f(x)$

c. $-3f(x+1)$ **d.** $-3f(x+1) + 2$

13. Si $f(x) = |x|$, dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f(2x)$

c. $-f(2x)$ **d.** $-3f(2x) + 2$

14. Si $f(x) = x^2$, dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f\left(\frac{1}{2}x\right)$

c. $-3f\left(\frac{1}{2}x\right)$ **d.** $-3f\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$

15. Si $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f(3x)$

c. $-\frac{1}{2}f(3x)$ **d.** $-\frac{1}{2}f(3x) + 2$

En los ejercicios 16 a 25 se da una función de varias fórmulas. Dibuje su representación gráfica y encuentre el dominio y el rango.

16. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -3 \le x < 1 \\ \sqrt{x - 1} & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$

19. $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si} \quad -4 \le x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ -2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

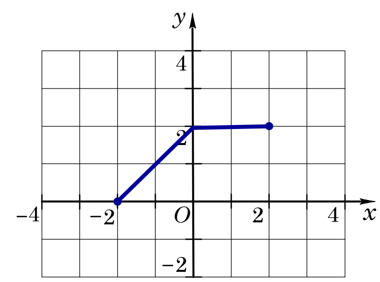
22. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -4 \le x < -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x \le 0 \\ -2 & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si} \quad x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si} \quad -3 \le x \le 3 \\ x - 3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

25. $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad |x| > 2 \\ -\sqrt{4 - x^2} & \text{si} \quad -2 \le x \le 2 \end{cases}$

26. La figura muestra la gráfica de una función f



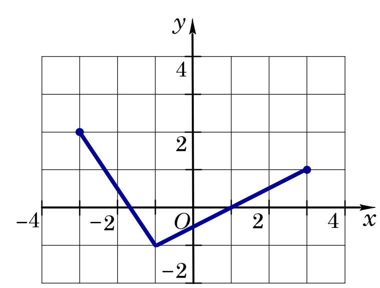
Dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f(x+1)$

c. $\frac{1}{2}f(x+1)$ **d.** $-\frac{1}{2}f(x+1) - 1$

e. Obtenga una función de dos fórmulas para la función original.

27. La figura muestra la gráfica de una función f



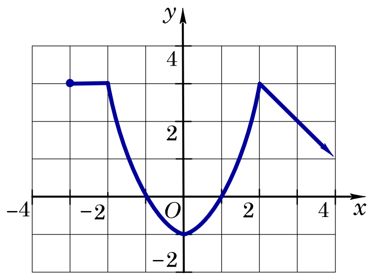
Dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f(-x)$

c. $f(-2x)$ **d.** $-f(-2x) + 2$

e. Obtenga una función de dos fórmulas para la función original.

28. La figura muestra la gráfica de una función f



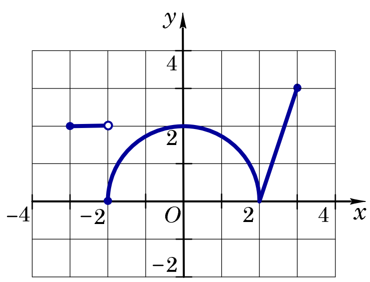
Dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f(x-1)$

c. $-f(x-1)$ **d.** $-\dfrac{1}{3}f(x-1)$

e. Obtenga una función de tres fórmulas para la función original.

29. La figura muestra la gráfica de una función f



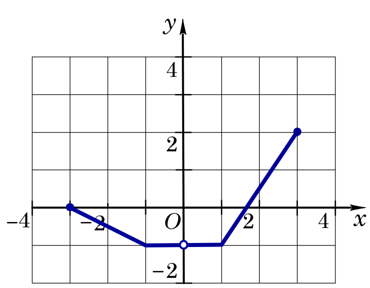
Dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

c. $-2f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ **d.** $-2f\left(\dfrac{1}{2}x\right)+1$

e. Obtenga una función de tres fórmulas para la función original.

30. La figura muestra la gráfica de una función f



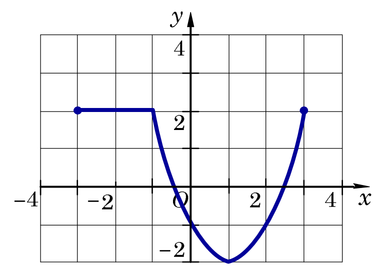
Dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f\left[\dfrac{1}{2}(x-2)\right]$

c. $-f\left[\dfrac{1}{2}(x-2)\right]$ **d.** $-f\left[\dfrac{1}{2}(x-2)\right]+2$

e. Obtenga una función de varias fórmulas para la función original.

31. La figura muestra la gráfica de una función f



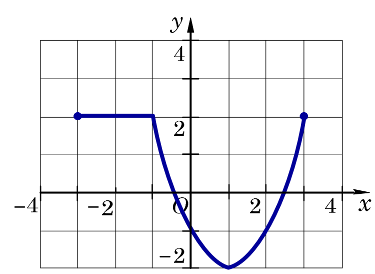
Dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $|f(x)|$

c. $-|f(x)|$ **d.** $-\dfrac{1}{2}|f(x)|$

e. Obtenga una función de varias fórmulas para la función original.

32. La figura muestra la gráfica de una función f



Dibuje en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones

a. $f(x)$ **b.** $f(|x|)$

c. $-f(|x|)$ **d.** $-f(|x|)+2$

e. Obtenga una función de varias fórmulas para la función original.