PROBLEMA RESUELTO 3

Dada la función polinomial

$$P(x) = 16x^6 + 8x^4 + 32x^3 - 43x^2 + 12x$$

a. Determine las posibles raíces racionales.

b. Use la regla de signos de Descartes determine la naturaleza de las raíces.

c. Encuentre todas las raíces del polinomio.

d. Exprese el polinomio como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles.

e. Dibuje la gráfica del polinomio.

Solución

a. Como el polinomio no tiene término constante, lo primero que hay que hacer es factorizar x.

$$P(x) = x\left(16x^5 + 8x^3 + 32x^2 - 43x + 12\right)$$

El polinomio reducido es

$$P_1(x) = 16x^5 + 8x^3 + 32x^2 - 43x + 12$$

y es sobre éste que debemos calcular los posibles ceros racionales y la naturaleza de los ceros

$$\frac{\text{factores de } 12}{\text{factores de } 16} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16}$$

De donde se tiene que las posibles raíces racionales son

$$\left\{\pm\frac{1}{16}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{16}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\right\}$$

b. Para determinar el número de raíces positivas usamos las variaciones de signo de $P_1(x)$

$$P_1(x) = 16x^5 + 8x^3 + \underbrace{32x^2 - 43x}_{1} \underbrace{\vphantom{x} + 12}_{2}$$

Como $P_1(x)$ tiene dos variaciones de signo, hay 2 o 0 raíces positivas

Para obtener el número de raíces negativas, calculamos las variaciones de signo de $P_1(-x)$

$$P_1(-x) = 16(-x)^5 + 8(-x)^3 + 32(-x)^2 - 43(-x) + 12$$

$$P_1(-x) = -16x^5 - \underbrace{8x^3 + 32x^2}_{1} + 43x + 12$$

Como solamente hay una variación negativa, el polinomio tiene exactamente un cero negativo.

Con la información anterior podemos construir una tabla que resume la naturaleza de las raíces

Positivas	Negativas	Nulas	Complejas	Total
2	1	1	2	6
0	1	1	4	6

c. Para encontrar las raíces racionales se utiliza división sintética

Probando con $x = 1$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
16 & 0 & 8 & 32 & -43 & 12 & 1 \\
 & 16 & 16 & 24 & 56 & 13 & \\
\hline
16 & 16 & 24 & 56 & 13 & 25 &
\end{array}$$

Como todos los números de la tercera fila son positivos $x = 1$ es una cota superior y el polinomio no tiene ceros mayores que 1.

Probando con $x = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
16 & 0 & 8 & 32 & -43 & 12 & 1/2 \\
 & 8 & 4 & 6 & 19 & -12 & \\
\hline
16 & 8 & 12 & 38 & -24 & 0 &
\end{array}$$

De donde $x = \dfrac{1}{2}$ es un cero del polinomio. El polinomio reducido es

$$P_2(x) = 16x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 38x - 24$$

Probando nuevamente con $x = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
16 & 8 & 12 & 38 & -24 & 1/2 \\
 & 8 & 8 & 10 & 24 & \\
\hline
16 & 16 & 20 & 48 & 0 &
\end{array}$$

De donde $x = \dfrac{1}{2}$ es cero de multiplicidad 2.

El nuevo polinomio reducido es

$$P_3(x) = 16x^3 + 16x^2 + 20x + 48$$

El polinomio no tiene más ceros positivos, por lo que ahora se buscará un cero negativo.

Probando con $x = -1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
16 & 16 & 20 & 48 & -1 \\
 & -16 & 0 & -20 & \\
\hline
16 & 0 & 20 & 28 &
\end{array}$$

Probando con $x = -2$

$$\begin{array}{rrrr|l} 16 & 16 & 20 & 48 & -2 \\ & -32 & 32 & -104 & \\ \hline 16 & -16 & 52 & -56 & \end{array}$$

Como todos los números de la tercera fila son alternos en signo el polinomio no tiene raíces menores que -2. Por otro lado, existe al menor un cero entre -1 y -2 ya que los residuos tienen signos opuestos.

Probando con $x = -\dfrac{3}{2}$

$$\begin{array}{rrrr|l} 16 & 16 & 20 & 48 & -3/2 \\ & -24 & 12 & -48 & \\ \hline 16 & -8 & 32 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = -\dfrac{3}{2}$ es un cero. El nuevo polinomio reducido es

$$P_4(x) = 16x^2 - 8x + 32$$

Como es de segundo grado se puede resolver por factorización o fórmula cuadrática

$$16x^2 - 8x + 32 = 0$$

$$8\left(2x^2 - x + 4\right) = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4(2)(4)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{31}\, i}{4}$$

d. Los otros dos ceros son complejos y el polinomio de segundo grado es irreducible. Por lo tanto, el polinomio original se factoriza como

$$P(x) = 8x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(2x^2 - x + 4\right)$$

e. En la siguiente figura se muestra la gráfica del polinomio