PROBLEMA RESUELTO 3

Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ y $g(x) = \sqrt{4 - x}$, calcule

a. $(f \circ g)(x)$ y calcule su dominio.

b. $(g \circ f)(x)$ y calcule su dominio.

c. $(f \circ g)(-6)$, de dos formas. Método 1: evaluando $g(-6)$ y sustituyendo este resultado en $f(x)$, método 2: calculando $f(g(x)$ y luego sustituyendo $x = -6$.

d. $(g \circ f)(5)$, por los dos métodos descritos en el inciso anterior.

Solución

a. Para calcular la función compuesta se tiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left(g(x)\right)\\ &= f\left(\sqrt{4-x}\right) = \sqrt{(\sqrt{4-x})^2 - 9}\\ &= \sqrt{4 - x - 9} = \sqrt{-5 - x}\end{aligned}$$

El dominio de esta función está formado por todos los valores de x en el dominio de la función g tales que $g(x)$ está en dominio de f. El dominio de la función g se encuentra resolviendo la desigualdad $4 - x \geq 0$

$$\begin{aligned}4 - x &\geq 0\\ x &\leq 4\end{aligned}$$

Por lo que el dominio de g es $(-\infty,4]$. El dominio de la función f se determina resolviendo la desigualdad $x^2 - 9 \geq 0$, que tiene como solución $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$.

El dominio de la función compuesta está formado entonces por todos los números en $(-\infty,4]$ tales que $g(x) = \sqrt{4-x}$ está en $(-\infty,-3] \cup [3,\infty)$. Como $\sqrt{4-x}$ es siempre mayor o igual a cero, es necesario obtener los valores de x tales que $\sqrt{4-x} \geq 3$ y que estén en el intervalo $(-\infty,4]$. Resolviendo la desigualdad se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} &\geq 3\\ 4 - x &\geq 9\\ -x &\geq 5\\ x &\leq -5\end{aligned}$$

Como todos los números en el intervalo $(-\infty,-5]$ están en $(-\infty,4]$, se tiene que el dominio de la función compuesta es $(-\infty,-5]$

b. Al calcular $(g \circ f)(x)$ se tiene

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\left(f(x)\right)\\ &= g\left(\sqrt{x^2 - 9}\right) = \sqrt{4 - \sqrt{x^2 - 9}}\end{aligned}$$

El dominio de la función compuesta está dado por los elementos en el dominio de f, tales que $f(x)$ está en el dominio de g. Del inciso anterior se tiene que el dominio de f es $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$ y el dominio de g es $(-\infty,4]$. El dominio de $(g\circ f)(x)$ está formado entonces por todos los números x en $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$ tales que $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ esté en el intervalo $(-\infty,4]$, es decir

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-9} &\le 4\\ x^2-9 &\le 16\\ x^2 &\le 25\end{aligned}$$

Los valores de x que cumplen ésta última desigualdad están en el intervalo $\left[-5,5\right]$. El dominio de la función compuesta es entonces $[-5,-3]\cup[3,5]$.

c. Método 1:

$$(f\circ g)(-6)=f\left(g(-6)\right)=f\left(\sqrt{4-(-6)}\right)=f\left(\sqrt{10}\right)=\sqrt{(\sqrt{10})^2-9}=\sqrt{1}$$

$$(f\circ g)(-6)=1$$

Método 2:

Como $(f\circ g)(x)=\sqrt{-5-x}$

$$(f\circ g)(-6)=\sqrt{-5-(-6)}=\sqrt{1}=1$$

d. Método 1:

$$(g\circ f)(5)=g\left(f(5)\right)=g\left(\sqrt{(5)^2-9}\right)=g(4)=\sqrt{4-4}=0$$

Método 2:

Como $(g\circ f)(x)=\sqrt{4-\sqrt{x^2-9}}$

$$(g\circ f)(5)=\sqrt{4-\sqrt{(5)^2-9}}=\sqrt{4-\sqrt{16}}=\sqrt{4-4}=0$$