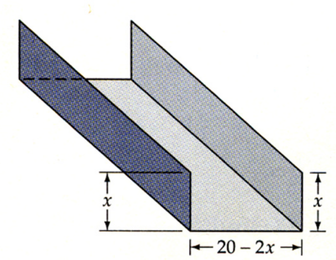
PROBLEMA RESUELTO 3

Una lámina metálica de 20 pulgadas de ancho y 12 pies de largo será utilizada para construir un canal rectangular de 12 pies de largo, como se muestra en la figura. Determine el valor de x de tal forma que el canal tenga una capacidad máxima.



Solución

Puede observarse que el canal tendrá una capacidad máxima cuando el área de la sección transversal sea máxima, es decir cuando el área del rectángulo que tiene como base $20-2x$ y altura x alcance su valor máximo.

El área del rectángulo es

$$\mathrm{A} = \text{base} \times \text{Altura}$$

$$\mathrm{A} = (20-2x)(x)$$

$$\mathrm{A}(x) = -2x^2 + 20x$$

El dominio de esta función está determinado por todos los valores que puede tomar x en el contexto del problema, dado que el ancho de la lámina es de 20 pulgadas, el valor de x debe ser mayor o igual a cero y menor o igual a 10, pues se doblan hacia arriba dos lados de largo x. Por lo tanto el dominio de la función es el intervalo $\left[0,10\right]$.

Para obtener el área máxima debemos localizar el vértice de la parábola. Usando la fórmula del vértice con $a=-2$ y $b=20$ se tiene

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-2)} = 5$$

Es decir que el área es máxima cuando la altura del canal es de 5 pulgadas. El área máxima es

$$\mathrm{A}(5) = -2(5)^2 + 20(5) = -50 + 100 = 50$$

Por lo que la capacidad del canal es máxima cuando la sección del canal es de 10 pulgadas de base por 5 pulgadas de altura.