PROBLEMA RESUELTO 3

Dada la función racional

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$$

a. Encuentre los interceptos con los ejes de coordenadas.

b. Encuentre las asíntotas verticales.

c. Encuentre la asíntota horizontal.

d. Encuentre las coordenadas de los agujeros si es que los tiene.

e. Dibuje la gráfica de la función.

Solución

Para comenzar a resolver el problema, es mejor factorizar el numerador, ya que el denominador no se puede factorizar

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 - 4)}{x^2 + 1} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x^2 + 1}$$

a. Para encontrar los interceptos con el eje x se encuentran los ceros del numerador y que no sean ceros del denominador, es decir

$$x(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 2, \quad x = -2$$

Como el denominador no tiene ningún cero, se tiene que la función intercepta al eje x en los tres ceros del numerador.

Para encontrar el intercepto con el eje y se sustituye $x = 0$ y se obtiene el valor de y

$$f(0) = \frac{(0)^3 - 4(0)}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Entonces la gráfica intercepta al eje y en el punto $(0, 0)$

b. Para las asíntotas verticales encontramos los ceros del denominador y que no sean ceros del numerador.

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm i$$

Como la función no tiene ceros en el denominador, no hay asíntotas verticales.

c. Como el grado del numerador mayor que el grado del denominador, es decir $n > m$, entonces no hay asíntotas horizontales.

d. La función no tiene agujeros ya que no tiene ceros comunes al numerador y al denominador.

e. Como no hay asíntotas verticales, los interceptos con el eje x dividen al eje x en los siguientes intervalos

$$(-\infty,-2),\quad (-2,0),\quad (0,2),\quad (2,\infty)$$

En cada uno de estos intervalos la función es positiva ó es negativa, para obtener el signo correspondiente a cada intervalo nos apoyamos con la siguiente tabla de valores

x	-4	-1	1	4
y	-2.8	1.5	-1.5	2.8

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Al desarrollar la división del numerador entre el denominador, el cociente de la división nos da el comportamiento final de la función racional.

Desarrollando la división se obtiene que

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1} = x - \frac{5x}{x^2 + 1}$$

El cociente de esta división es x, lo que nos indica que cuando x toma valores negativos muy grandes o valores positivos muy grandes, la función racional se aproxima a la recta

$$y = x$$

Ahora trace una curva de izquierda a derecha en cada intervalo, tomando en cuenta que en cada uno de ellos la curva es positiva o es negativa, debe pasar por los puntos que se han dibujado y cuando la curva se aleja del origen se acerca a la recta $y = x$, la cual es llamada asíntota oblicua. Si tiene dudas puede dibujar algunos puntos adicionales. El resultado es la gráfica siguiente