PROBLEMA RESUELTO 3

Dada la función $f(x) = x^2 + 4x - 2$

a. Dibuje la representación gráfica e indique si la función es uno a uno.

b. Determine el dominio y el rango de f.

c. Encuentre la función inversa f^{-1}, restringiendo el dominio de f si es necesario.

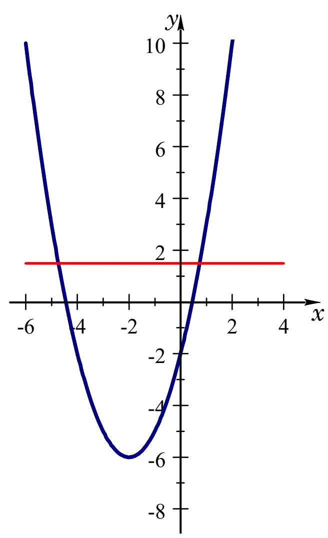
d. Indique el dominio y el rango de f^{-1}

e. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$

f. Dibuje la gráfica de f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas.

Solución

a. La figura siguiente muestra la gráfica de f, que es una parábola vertical. La función no es uno a uno ya que hay rectas horizontales que la interceptan en dos puntos



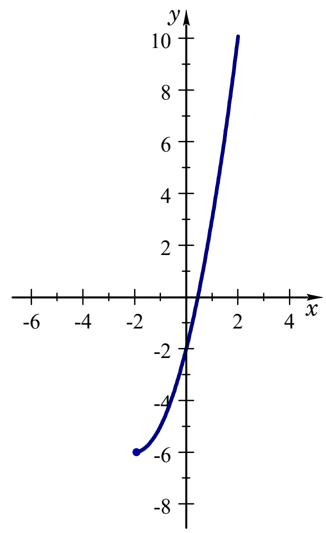
b. El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales. Para encontrar el rango se debe localizar el vértice de la parábola, lo cual se hará completando cuadrados

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x - 2 \\ &= (x^2 + 4x + 4) - 2 - 4 \\ &= (x+2)^2 - 6 \end{aligned}$$

Obteniendo que el vértice está en el punto $(h,k) = (-2,-6)$. A partir del vértice se tiene que el rango de la función está formado por todos los números en el intervalo $[-6,\infty)$

c. Como f no es una función uno a uno, es necesario restringir el dominio para que si lo sea. Restringiendo el dominio al intervalo $[-2,\infty)$, en el cual la función es creciente, se obtiene una función uno a uno.

La figura siguiente muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x - 2$ con dominio $[-2,\infty)$ y rango $[-6,\infty)$



Para encontrar la función inversa se despeja x en la ecuación $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y &= (x+2)^2 - 6 \\ y + 6 &= (x+2)^2 \\ \pm\sqrt{y+6} &= x + 2 \\ \pm\sqrt{y+6} - 2 &= x \end{aligned}$$

Observe que se han obtenido dos fórmulas para x, $x = \sqrt{y+6} - 2$ y $x = -\sqrt{y+6} - 2$.

La que corresponde a la restricción que se ha realizado es la primera, ya que $x \geq -2$.
Por lo tanto la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x+6} - 2$

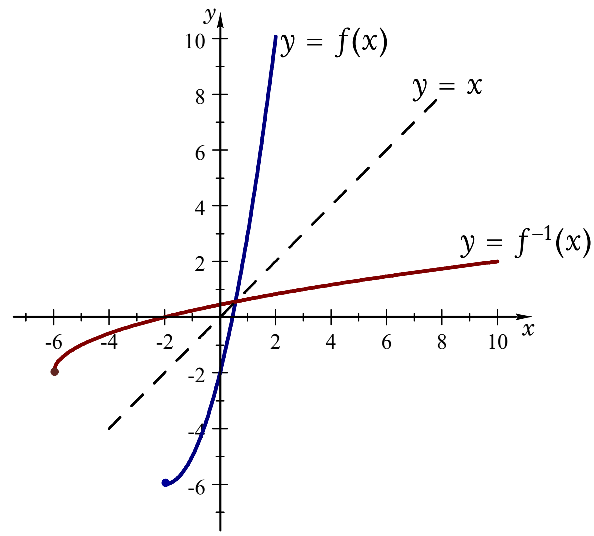
d. El dominio de f^{-1} es el rango de f, es decir el intervalo $[-6,\infty)$, el Rango de f^{-1} es el dominio de f, es decir el intervalo $[-2,\infty)$.

e. Utilizando la composición para comprobar que son funciones inversas se tiene

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt{x+6} - 2\right) = \left((\sqrt{x+6} - 2) + 2\right)^2 - 6 = \left(\sqrt{x+6}\right)^2 - 6 = x + 6 - 6 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left((x+2)^2 - 6\right) = \sqrt{\left((x+2)^2 - 6\right) + 6} - 2 = \sqrt{(x+2)^2} - 2 = x + 2 - 2 = x$$

f. La siguiente figura muestra la gráfica de f en color azul y la de f^{-1} en color rojo. Al igual que en el ejemplo anterior se observa la simetría de ambas funciones con respecto a la recta $y = x$


y
x
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
$y = f(x)$
$y = x$
$y = f^{-1}(x)$