

## PROBLEMA RESUELTO 2

---

Dada la función racional

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^4 - 4x^2}$$

- Encuentre los interceptos con los ejes de coordenadas.
- Encuentre las asíntotas verticales.
- Encuentre la asíntota horizontal.
- Encuentre las coordenadas de los agujeros si es que los tiene.
- Dibuje la gráfica de la función.

### Solución

---

Para comenzar a resolver el problema, es mejor factorizar el numerador y el denominador, para esta función racional se tiene

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^4 - 4x^2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2(x - 2)(x + 2)}$$

Observe que la función racional tiene el factor  $(x - 2)$  en el numerador y en el denominador. Esto nos dice que la función tiene un agujero en  $x = 2$ .

- Para encontrar los interceptos con el eje  $x$  se encuentran los ceros del numerador y que no sean ceros del denominador, es decir

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3} i \end{aligned}$$

Como los ceros son complejos, la gráfica de la función no intercepta al eje  $x$ .

Para encontrar el intercepto con el eje  $y$  se sustituye  $x = 0$  y se obtiene el valor de  $y$

$$f(0) = \frac{(0)^3 - 8}{(0)^4 - 4(0)^2} = \frac{-8}{0}$$

Como la división entre cero no está definida, la gráfica de la función no corta al eje  $y$ .

- Para las asíntotas verticales encontramos los ceros del denominador y que no sean ceros del numerador.

$$x^2(x + 2) = 0$$

$$x = 0, \quad x = -2$$

Las asíntotas verticales de la función son las rectas  $x = 0$  y  $x = -2$

- Como el grado del numerador menor al grado del denominador, es decir  $n < m$ , entonces la recta  $y = 0$  es la asíntota horizontal.

- d. La función tiene un agujero en  $x = 2$ , ya que en este número se hace cero el numerador y el denominador. Para encontrar la coordenada  $y$  del agujero evaluamos la función sin el factor que produce el agujero en  $x = 2$ .

$$f_1(x) = \frac{(x^2 + 2x + 4)}{x^2(x + 2)}$$

$$f_1(2) = \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{(2)^2(2 + 2)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Por lo que el agujero se encuentra en el punto  $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ ,

- e. Como no hay interceptos con el eje  $x$ , las asíntotas verticales dividen al eje  $x$  en los siguientes intervalos

$$(-\infty, -2), (-2, 0), (0, \infty)$$

Evaluando un valor de  $x$  en cada intervalo se obtiene la siguiente tabla de valores

$x$	-4	-1	4
$y$	-0.37	3.0	0.29

Para dibujar la representación gráfica primero trace las asíntotas horizontales y verticales, el agujero y los puntos de la tabla de valores.

Ahora trace una curva de izquierda a derecha en cada intervalo, tomando en cuenta que en cada uno de ellos la curva es positiva o es negativa, debe pasar por los puntos que se han dibujado y cuando la curva se aleja del origen se acerca a la asíntota. Si tiene dudas puede dibujar algunos puntos adicionales. El resultado es la gráfica siguiente

