PROBLEMA RESUELTO 2

Dada la función polinomial

$$P(x) = 2x^6 - 5x^5 + 9x^4 + x^3 - 15x^2$$

a. Determine las posibles raíces racionales.

b. Use la regla de signos de Descartes determine la naturaleza de las raíces.

c. Encuentre todas las raíces del polinomio.

d. Exprese el polinomio como un producto de factores lineales

e. Dibuje la gráfica del polinomio.

Solución

a. Primero observe que el polinomio tiene factor común x^2, factorizando se tiene

$$P(x) = 2x^6 - 5x^5 + 9x^4 + x^3 - 15x^2$$

$$P(x) = x^2(2x^4 - 5x^3 + 9x^2 + x - 15)$$

Por lo que $x = 0$, es una raíz del polinomio de multiplicidad 2. El polinomio reducido es

$$P_1(x) = 2x^4 - 5x^3 + 9x^2 + x - 15$$

$$\text{Posibles raíces racionales} = \frac{\text{factores de 15}}{\text{factores de 2}} = \frac{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15}{\pm 1, \pm 2}$$

De donde se tiene que las posibles raíces racionales son

$$\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm 3, \pm 5, \pm\frac{15}{2}, \pm 15\right\}$$

b. Para determinar el número de raíces positivas usamos las variaciones de signo de $P_1(x)$

$$P_1(x) = \underbrace{2x^4 - 5x^3}_{1}\underbrace{\;\; + 9x^2}_{2} \underbrace{+ x - 15}_{3}$$

Como $P_1(x)$ tiene tres variaciones de signo, el polinomio tiene 3 o 1 ceros positivos

Para determinar el número de ceros negativos usamos las variaciones de signo de $P_1(-x)$

$$P_1(-x) = 2(-x)^4 - 5(-x)^3 + 9(-x)^2 + (-x) - 15$$

$$P_1(-x) = 2x^4 + 5x^3 + \underbrace{9x^2 - x}_{1} - 15$$

Como $P_1(-x)$ tiene 1 variación de signo, elpolinomio tiene exactamente 1 cero negativo.

Con la información anterior podemos construir una tabla que resume la naturaleza de las raíces

Positivas	Negativas	Nulas	Complejas	Total
3	1	2	0	6
1	1	2	2	6

c. Para encontrar las raíces racionales se utiliza división sintética

Probando con $x = 3$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -5 & 9 & 1 & -15 & 3 \\ & 6 & 3 & 36 & 111 & \\ \hline 2 & 1 & 12 & 37 & 96 & \end{array}$$

Como todos los números del tercer renglón son positivos, 3 es una cota superior, es decir que el polinomio no tiene raíces mayores que 3.

Probemos ahora con $x = 1$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -5 & 9 & 1 & -15 & 1 \\ & 2 & -3 & 8 & 9 & \\ \hline 2 & -3 & 8 & 9 & -6 & \end{array}$$

Como $P_1(3) = 96$ y $P_1(1) = -6$, tienen signos opuestos, el polinomio tiene al menos un cero entre 1 y 3, si éste cero es racional debe ser $3/2$

Probando con $x = \dfrac{3}{2}$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -5 & 9 & 1 & -15 & 3/2 \\ & 3 & -3 & 9 & 15 & \\ \hline 2 & -2 & 6 & 10 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = \dfrac{3}{2}$ es un cero del polinomio. El polinomio original factorizado es

$$P(x) = x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(2x^3 - 2x^2 + 6x + 10\right)$$

El nuevo polinomio reducido es

$$P_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 6x - 10$$

Buscando la raíz negativa, se prueba con $x = -1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -2 & 6 & -10 & -1 \\ & -2 & 4 & 10 & \\ \hline 2 & -4 & 10 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = -1$ es un cero y el polinomio original puede factorizarse como

$$P(x) = x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1)\left(2x^2 - 4x + 10\right)$$

El nuevo polinomio reducido es $P_3(x) = 2x^2 - 4x + 10$, las últimas dos raíces las se encuentran usando la fórmula general

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(10)}}{(2)(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{4} = \frac{4 \pm 8i}{4} = 1 \pm 2i$$

De donde todos los ceros del polinomio son

$$0, \quad 0, \quad -1, \quad \frac{3}{2}, \quad 1+2i, \quad 1-2i$$

e. La siguiente figura muestra la representación gráfica del polinomio