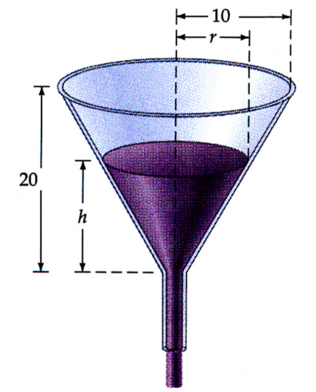
PROBLEMA RESUELTO 2

Un cono regular recto invertido tiene 10 pulgadas de radio y 20 pulgadas de altura, como se muestra en la figura. El cono contiene una sustancia química que está saliendo del mismo, de tal forma que el volumen dentro del cono está cambiando continuamente.



a. Escriba el radio r del volumen de la sustancia en términos de la altura h

b. Escriba el volumen V del volumen líquido como función de la altura h.

c. Obtenga el dominio de la función.

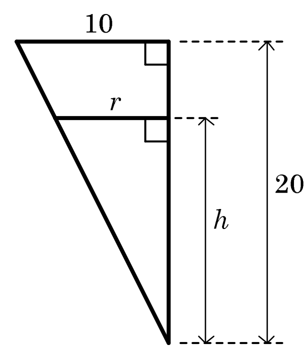
d. Calcule la altura para la cual el volumen del líquido es la mitad del volumen total del recipiente.

Solución

a. Para expresar el radio r como en términos de la altura se debe utilizar una relación de semejanza entre triángulos. De la figura a la derecha se tiene

$$\frac{r}{10} = \frac{h}{20}$$

$$r = \frac{10h}{20} = \frac{h}{2}$$



b. El volumen del líquido es el volumen de un cono de radio r y altura h, es decir

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Sustituyendo $r = \dfrac{h}{2}$ se obtiene la función para el volumen en términos de h

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h^2}{4}\right)h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Es decir que la función que expresa el volumen en función de la altura es

$$V(h) = \frac{\pi}{12}h^3$$

c. Puesto que la altura del líquido depende de las dimensiones del recipiente donde está colocado, el cual tiene una altura de 20 pul, se tiene que $0 \le h \le 20$. Por lo tanto, el dominio de la función es el intervalo $[0, 20]$

d. Para responder ésta última pregunta primero se calcula el volumen total del recipiente

$$V_T = \frac{1}{3}\pi(10)^2(20) = \frac{2000\pi}{3}$$

La mitad del volumen total es $\frac{V_T}{2} = \frac{2000\pi}{6} = \frac{1000\pi}{3}$

Sustituyendo este volumen en la función y despejando h

$$\frac{1000\pi}{3} = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{12(1000\pi)}{3\pi} = h^3$$

$$\sqrt[3]{4000} = h$$

$$h \approx 15.87$$

Cuando el líquido tiene un volumen igual a la mitad de la capacidad del recipiente la altura es 15.87 pulgadas.