1.5 Otros tipos de ecuaciones

OBJETIVOS

- Resolver ecuaciones con radicales en donde la incógnita está contenida en radicales.
- Resolver ecuaciones reducibles a una ecuación cuadrática por medio de una sustitución.
- Resolver ecuaciones que contienen valor absoluto.
- Plantear y resolver problemas en donde el modelo es una ecuación con radicales, reducible a cuadrática o con valor absoluto.

En las secciones anteriores se han estudiado los métodos de solución de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas. En ésta sección se estudian otros tipos de ecuaciones entre ellas algunas ecuaciones polinomiales, ecuaciones con radicales, las ecuaciones que se pueden reducir a una ecuación cuadrática por medio de una sustitución y las ecuaciones que contienen valor absoluto.

Ecuaciones factorizables

Algunas ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 pueden resolverse por medio de factorización como se ilustra en el ejemplo siguiente

Ejemplo 1: Solución de una ecuación por factorización

Resuelva la ecuación

$$15x^5 - 20x^4 = 6x^3 - 8x^2$$

Solución

Trasladando todos los términos al lado izquierdo y tomando factor común x^2

$$15x^5 - 20x^4 - 6x^3 + 8x^2 = 0$$

$$x^2(15x^3 - 20x^2 - 6x + 8) = 0$$

El polinomio dentro del paréntesis se puede factorizar por agrupación de términos

$$x^2\left[(15x^3 - 20x^2) - (6x - 8)\right] = 0$$

$$x^2\left[5x^2(3x - 4) - 2(3x - 4)\right] = 0$$

$$x^2\left[(3x - 4)(5x^2 - 2)\right] = 0$$

$$x^2(3x - 4)(5x^2 - 2) = 0$$

Igualando a cero cada uno de los factores y se despejando x

Si $x^2 = 0$, se obtiene que $x = 0$ es una solución

Si $3x - 4 = 0$, se obtiene que $x = \dfrac{4}{3}$ es otra solución

Si $5x^2 - 2 = 0$, se obtiene que $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Por lo tanto las soluciones de la ecuación son

$$x = 0, \quad x = \frac{4}{3}, \quad x = \frac{\sqrt{10}}{5}, \quad x = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Ecuaciones con radicales

Son aquellas ecuaciones en las cuales la incógnita se encuentra dentro de una raíz. Las siguientes son ecuaciones con radicales

$$\sqrt{2x+5} = 1, \qquad \sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{x+1}}, \qquad \sqrt[3]{x-1} = x - 3$$

En la mayor parte de los casos, para resolver una ecuación que contiene radicales se debe elevar ambos lados de la ecuación a una potencia tal, que al desarrollar las operaciones resultantes se obtenga una ecuación que no contenga radicales. La ecuación que se obtiene por este procedimiento, tiene la característica de tener entre sus soluciones a las soluciones de la ecuación original.

En otras palabras, la ecuación que se obtiene puede tener algunas soluciones que no necesariamente son soluciones de la ecuación original, a las cuales se les llama soluciones extrañas; por lo que siempre se debe hacer la prueba al resolver una ecuación con radicales.

Ejemplo 2: Solución de una ecuación con 2 radícales

Resuelva la ecuación

$$\sqrt{2x+5} - \sqrt{4x+3} = 1$$

Solución

Como en esta ecuación las expresiones contienen raíces cuadradas, debemos elevar ambos lados de la ecuación al cuadrado y desarrollar las operaciones resultantes. Si se considera apropiado, antes de elevar al cuadrado se puede transponer términos de un lado a otro de la ecuación.

Trasladando el segundo radical al lado derecho y elevando ambos lados al cuadrado se tiene

$$\sqrt{2x+5} = 1 + \sqrt{4x+3}$$

$$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{4x+3}\right)^2$$

En el lado izquierdo la raíz cuadrada y el cuadrado se anulan, mientras que en el lado derecho hay que desarrollar el binomio y sumar los términos semejantes

$$(2x+5) = 1 + 2\sqrt{4x+3} + \left(\sqrt{4x+3}\right)^2$$

$$2x + 5 = 1 + 2\sqrt{4x+3} + (4x+3)$$

$$2x + 5 - 1 - 4x - 3 = 2\sqrt{4x+3}$$

$$-2x + 1 = 2\sqrt{4x+3}$$

Después de las operaciones efectuadas, todavía queda un radical en la ecuación, razón por la cual hay que elevar ambos lados al cuadrado nuevamente y efectuar las operaciones que resulten

$$(-2x+1)^2 = \left(2\sqrt{4x+3}\right)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 4(4x+3)$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 16x + 12$$

$$4x^2 - 20x - 11 = 0$$

Ahora se resuelve la ecuación anterior por factorización

$$4x - 20x - 11 = 0$$

$$\frac{(4x - 22)(4x + 2)}{4} = 0$$

$$\frac{(4x - 22)(4x + 2)}{(2)(2)} = 0$$

$$(2x - 11)(2x + 1) = 0$$

De donde se obtiene que $x = \frac{11}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$

Ambos valores deben ser sustituidos en la ecuación original para comprobar si realmente son soluciones. Al hacer las pruebas se obtiene que únicamente $x = -\frac{1}{2}$ satisface la ecuación original. Se deja como ejercicio al estudiante hacer la prueba.

Ejemplo 3: Resolviendo una ecuación con radicales y fracciones

Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x + 2} + \sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x + 2}}$$

Solución

Esta ecuación contiene radicales, pero también contiene fracciones algebraicas, para resolverla es conveniente eliminar primero los denominadores, para ello se multiplica la ecuación por el mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo en este caso es $\sqrt{x + 2}$

Multiplicando ambos lados por el MCM se tiene

$$\sqrt{x + 2}\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}\sqrt{x + 2} = \frac{3\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x + 2}}$$

$$x + 2 + \sqrt{x}\sqrt{x + 2} = 3$$

Ahora que la ecuación ya no contiene denominadores, se puede aislar el radical, elevar ambos lados al cuadrado y despejar la incógnita x

$$\sqrt{x}\sqrt{x + 2} = 1 - x$$

$$\left(\sqrt{x}\sqrt{x + 2}\right)^2 = (1 - x)^2$$

$$x(x + 2) = 1 - 2x + x^2$$

$$x^2 + 2x = 1 - 2x + x^2$$

$$4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Al hacer la prueba en la ecuación inicial encontramos que efectivamente $x = \frac{1}{4}$ es la solución de la ecuación.

Ecuaciones reducibles a cuadráticas

Algunas ecuaciones pueden ser reducidas o transformadas a una ecuación cuadrática por medio de una sustitución apropiada. Es usual utilizar la letra u para representar la expresión que se sustituye, los ejemplos que siguen ilustran ésta técnica para resolver ecuaciones

Ejemplo 4: Resolviendo una ecuación por sustitución

Resuelva la ecuación

$$3x^{-2/3} + 4x^{-1/3} - 4 = 0$$

Solución

Al observar los exponentes de la ecuación puede verse que el exponente -2/3 es el doble que el otro exponente, -1/3. La observación anterior sugiere que la ecuación puede ser transformada a una ecuación cuadrática si se hace la sustitución apropiada.

Haciendo $u = x^{-1/3}$ se tiene que $u^2 = \left(x^{-1/3}\right)^2 = x^{-2/3}$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación dada se tiene

$$3x^{-2/3} + 4x^{-1/3} - 4 = 0$$

$$3u^2 + 4u - 4 = 0$$

Al resolver la ecuación anterior por factorización

$$3u^2 + 4u - 4 = 0$$

$$\frac{(3u + 6)(3u - 2)}{3} = 0$$

$$(u + 2)(3u - 2) = 0$$

Se obtienen las soluciones $u = -2$ y $u = \frac{2}{3}$

Para cada uno de estos valores de u hay que encontrar sus correspondientes valores de x, utilizando la expresión $u = x^{-1/3}$

Para $u = -2$ se obtiene

$$-2 = x^{-1/3}$$

Para despejar x se eleva ambos lados de la ecuación a una potencia tal que se eliminen los exponentes de x, esto se logra elevando ambos lados al exponente -3

$$(-2)^{-3} = \left(x^{-1/3}\right)^{-3}$$

$$\frac{1}{(-2)^3} = x^{3/3}$$

$$-\frac{1}{8} = x$$

En forma similar, para $u=2/3$ tenemos

$$x^{-1/3} = \frac{2}{3}$$

$$\left(x^{-1/3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

$$x^{3/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$$

$$x = \frac{27}{8}$$

Para concluir la solución del problema es se debe realizar la prueba en la ecuación dada (actividad que se deja al estudiante como ejercicio), obteniéndose que solo $x = \frac{27}{8}$ satisface la ecuación, por lo que la solución de la ecuación es

$$x = \frac{27}{8}$$

Ejemplo 5: Resolviendo una ecuación con fracciones por sustitución

Resuelva la ecuación

$$1 - \frac{8}{x^2+1} + \frac{16}{(x^2+1)^2} = 0$$

Solución

Observe que al multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo, se obtiene una ecuación de cuarto grado. Como aún no se han estudiado los métodos para resolver ecuaciones de grado mayor que 2, se debe buscar otra alternativa para resolver la ecuación propuesta.

La ecuación puede expresarse como

$$1 - 8\left(\frac{1}{x^2+1}\right) + 16\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 = 0$$

Donde se puede ver que la sustitución $u = \frac{1}{x^2+1}$ transforma la ecuación a una ecuación cuadrática. Efectuando la sustitución se obtiene

$$1 - 8u + 16u^2 = 0$$

Como el lado izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto se puede factorizar y luego despejar u

$$16u^2 - 8u + 1 = 0$$

$$(4u-1)^2 = 0$$

$$4u - 1 = 0$$

$$u = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo $u = 1/4$ en la expresión $u = \frac{1}{x^2+1}$ para obtener las soluciones de la ecuación original

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{x^2+1}$$
$$x^2 + 1 = 4$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Al hacer la prueba se obtiene que los dos valores satisfacen la ecuación dada, por lo que las soluciones de la ecuación son $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$

Ejemplo 6: Resolviendo una ecuación con exponentes fraccionarios negativos

Resuelva la ecuación

$$2x^{1/2} = 5 - 2x^{-1/2}$$

Solución

A simple vista no parece ser una ecuación de forma cuadrática, pero al trasladar el exponente negativo al denominador se tiene

$$2x^{1/2} = 5 - 2\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$$

Ahora se puede hacer la sustitución $u = x^{1/2}$ y multiplicar ambos lados de la ecuación por u para obtener una ecuación cuadrática

$$2u = 5 - 2\left(\frac{1}{u}\right)$$
$$2u^2 = 5u - 2$$
$$2u^2 - 5u + 2 = 0$$

Factorizando la ecuación y despejando u se tiene

$$\frac{(2u-4)(2u-1)}{2} = 0$$
$$(u-2)(2u-1) = 0$$
$$u = 2, \quad u = \frac{1}{2}$$

Despejando x para $u = 2$

$$x^{1/2} = 2$$
$$\left(x^{1/2}\right)^2 = (2)^2$$
$$x = 4$$

Despejando x para $u = \frac{1}{2}$

$$x^{1/2} = \frac{1}{2}$$
$$\left(x^{1/2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$x = \frac{1}{4}$$

Como los dos valores satisfacen la ecuación original, la solución es

$$x = 4 \quad \text{y} \quad x = 1/2$$

Ejemplo 7: Resolviendo una ecuación con radicales por sustitución

Resuelva la ecuación

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = 3$$

Solución

Observe que las fracciones dentro de los radicales son recíprocas, es decir si hacemos $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$, entonces la otra raíz se puede escribir como

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$$

Al hacer las sustituciones en la ecuación dada se obtiene la siguiente ecuación

$$u + 2\left(\frac{1}{u}\right) = 3$$

Multiplicando ambos lados por u y resolviendo la ecuación cuadrática resultante

$$u^2 + 2 = 3u$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

$$(u-2)(u-1) = 0$$

$$u = 2, \quad u = 1$$

Encontrando x para $u = 2$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = 2$$

$$\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\right)^2 = (2)^2$$

$$\frac{x+1}{x-2} = 4$$

$$x + 1 = 4x - 8$$

$$x = 3$$

Encontrando x para $u = 1$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = 1$$

$$\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\right)^2 = (1)^2$$

$$\frac{x+1}{x-2} = 1$$

$$x + 1 = x - 2$$

$$1 = -2$$

Para $u = 1$ se obtiene una proposición falsa, de la cual no se obtiene ninguna solución. Al hacer la prueba para $x = 3$, si satisface la ecuación original. Por lo que la solución de la ecuación es $x = 3$

Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver una ecuación que contiene valor absoluto, se puede utilizar cualquiera de las dos alternativas siguientes

a. Utilizando la propiedad del valor absoluto siguiente

Propiedad del valor absoluto

Si E es una expresión algebraica y a es un número no negativo, entonces

$$|E| = a \quad \text{si y solo si} \quad E = a \quad \text{o} \quad E = -a$$

b. Otra forma de resolver una ecuación que contiene valor absoluto consiste en elevar ambos lados de la ecuación al cuadrado, con el objeto de obtener una ecuación que no contenga valor absoluto, utilizando la propiedad

$$|a|^2 = a^2$$

Al resolver una ecuación con valor absoluto es indispensable hacer la prueba para las soluciones encontradas, pues es usual que resulten raíces extrañas.

Ejemplo 8: Resolviendo una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación

$$3|x+1| + 2 = 11$$

Solución

La ecuación será resuelta utilizando la primera alternativa, Para ello se debe aislar la expresión con valor absoluto

$$3|x+1| + 2 = 11$$

$$3|x+1| = 9$$

$$|x+1| = 3$$

La ecuación anterior es equivalente a las dos ecuaciones

$$x + 1 = 3 \qquad \text{o} \qquad -(x+1) = 3$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$x + 1 = 3$$

$$x = 2$$

$$-x - 1 = 3$$

$$-x = 4$$

$$x = -4$$

Al hacer las pruebas se obtiene que los dos valores satisfacen la ecuación dada. Por lo tanto las soluciones de la ecuación son

$$x = 2 \quad \text{y} \quad x = -4.$$

Ejemplo 9: Una ecuación con doble valor absoluto

Resuelva la ecuación

$$|x+3| - 1 = |x+1|$$

Solución

Esta ecuación se resolverá elevando al cuadrado ambos lados y desarrollando las operaciones resultantes, debe tomarse en cuenta que al elevar al cuadrado se pueden obtener soluciones extrañas, es decir soluciones que no satisfacen la ecuación original

$$|x+3| - 1 = |x+1|$$

$$(|x+3| - 1)^2 = |x+1|^2$$

$$|x+3|^2 - 2|x+3| + 1 = (x+1)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 - 2|x+3| + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$-2|x+3| = -4x - 9$$

Elevando nuevamente al cuadrado se tiene

$$(-2|x+3|)^2 = (-4x-9)^2$$
$$4(x+3)^2 = 16x^2 + 72x + 81$$
$$4(x^2 + 6x + 9) = 16x^2 + 72x + 81$$
$$4x^2 + 24x + 36 = 16x^2 + 72x + 81$$
$$-12x^2 - 48x - 45 = 0$$
$$4x^2 + 16x + 15 = 0$$

Factorizando la ecuación y despejando x

$$(2x+5)(2x+3) = 0$$
$$x = \frac{-5}{2}, \quad x = \frac{-3}{2}$$

Al hacer las pruebas obtiene que únicamente $x = -\frac{3}{2}$ satisface la ecuación dada, por lo que la solución es $x = -\frac{3}{2}$. Se deja como ejercicio al estudiante que resuelva la misma ecuación utilizando el otro método.

Ejercicios de la sección 1.5

En los ejercicios 1 a 5 resuelva las ecuaciones por factorización

1. $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
2. $x^3 - x^2 - 6x = 0$
3. $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$
4. $4x^4 + 10x^3 - 6x^2 - 15x = 0$
5. $15x^5 - 20x^4 = 6x^3 - 8x^2$

En los ejercicios 6 a 30 resuelva la ecuación con radicales

6. $\sqrt{x^2 - 28} - 6 = 0$
7. $\sqrt{x^2 + 8} = 2x + 1$
8. $\sqrt{x - 5} = \sqrt{x + 3}$
9. $2x + \sqrt{x^2 + x - 1} = 3$
10. $\sqrt{10x - 7 - 2x^2} + 3 = 1$
11. $\sqrt{3 - x} - \sqrt{2 + x} = 1$
12. $\sqrt{2x - 6} + \sqrt{x + 4} = 5$
13. $\sqrt{x^2 - 24} - \sqrt{x^2 - 21} = 5$
14. $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{x - 1}$
15. $\sqrt{5x - 1} - 2\sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 5}$
16. $\sqrt{13x - 20} = 2\sqrt{x - 3} + 3\sqrt{x - 2}$
17. $\sqrt{15x - 2} - 3\sqrt{x + 2} = \sqrt{6x - 20}$
18. $x\sqrt{2x + 1} = x^2 + x$
19. $\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{\sqrt{x - 3}} = 1$
20. $\sqrt{5x - 6} = \sqrt{3x + 7} + 1$
21. $\sqrt[4]{2x^2 - 1} = x$
22. $\sqrt[3]{x^2 + x - 4} = 2$
23. $\sqrt[4]{2x + 6} = \sqrt{x + 3}$
24. $\sqrt{x + 10} - \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 14} = 0$
25. $\sqrt{2\sqrt{x + 1}} = \sqrt{3x - 5}$
26. $\sqrt{3\sqrt{5x + 16}} = \sqrt{5x - 2}$
27. $\sqrt{4\sqrt{2x - 5}} = \sqrt{x + 5}$

28. $\sqrt{16 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

29. $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x} = \dfrac{3}{\sqrt{x + 2}}$

30. $\sqrt{2x - 2} + \sqrt{3x - 2} = \dfrac{4x + 9}{\sqrt{3x - 2}}$

En los ejercicios 31 al 58 resuelva la ecuación utilizando una sustitución apropiada para transformarla en una ecuación cuadrática.

31. $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$

32. $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$

33. $x^6 + x^3 - 6 = 0$

34. $21x^6 + 22x^3 = 8$

35. $x^{1/2} - 3x^{1/4} + 2 = 0$

36. $3x^{2/3} - 11x^{1/3} - 4 = 0$

37. $100x^{-4/3} - 409x^{-2/3} + 36 = 0$

38. $(3x - 5)^{2/3} + 6(3x - 5)^{1/3} = -8$

39. $4x^{-4} - 7x^{-2} - 36 = 0$

40. $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$

41. $9x - 52\sqrt{x} + 64 = 0$

42. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x} = 10$

43. $100x^{-4/3} - 409x^{-2/3} + 36$

44. $2x^{-1} + 5 = 12x$

45. $6x^{1/2} - 3x^{-1/2} + 7 = 0$

46. $10\left(\dfrac{x - 2}{x}\right)^2 + 9\left(\dfrac{x - 2}{x}\right) - 9 = 0$

47. $2\left(\dfrac{x - 3}{x + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{x - 3}{x + 1}\right) - 1 = 0$

48. $\left(\dfrac{x + 2}{x - 2}\right) - 4\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right) - 3 = 0$

49. $3\left(\dfrac{x + 3}{2x - 1}\right)^2 - \dfrac{4x + 12}{2x - 1} + 1 = 0$

50. $3\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right) + \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right) - 5 = 0$

51. $\sqrt{2x - 1} + \dfrac{6}{\sqrt{2x - 1}} = 5$

52. $2\sqrt{\dfrac{2x}{x - 1}} - 2\sqrt{\dfrac{x - 1}{2x}} - 3 = 0$

53. $2x^2 - 6x - 7\sqrt{x^2 - 3x - 2} = 8$

54. $6x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - x - 6} = 38$

55. $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$

56. $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$

57. $\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} = 2$

58. $\sqrt{x + 3 + 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} = 4$

En los ejercicios 59 al 75 Resuelva la ecuación con valor absoluto.

59. $|x + 7| = 2$

60. $|2x - 3| + 6 = 6$

61. $2|2x - 1| + 3 = 9$

62. $|5 + x| = 1 - 2x$

63. $|8x - 4| = 9x - 5$

64. $|1 + x| = 2|x - 1| + x$

65. $|2x - 1| + |x + 1| = 9$

66. $|4x + 3| + |x - 1| = 12$

67. $|2x + 3| - |2x - 2| = 1$

68. $|x + 2| + 1 = |x + 7|$

69. $|x - 3| = |x| + 1$

70. $|3x + 5| - |1 + 3x| = 3$

71. $|2x^2| - 5|x| - 3 = 0$

72. $2x^2 + 4x - 5|x + 1| = 1$

73. $x^2 - 4|x + 1| - 4 = 0$

74. $|2x - x^2| = 1$

75. $|2x^2 - 9x - 5| = 3x - 5$