

PROBLEMA RESUELTO 1

Dada la función racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + x - 3}$$

- Encuentre los interceptos con los ejes de coordenadas.
- Encuentre las asíntotas verticales.
- Encuentre la asíntota horizontal.
- Encuentre las coordenadas de los agujeros si es que los tiene.
- Dibuje la gráfica de la función.

Solución

Para comenzar a resolver el problema, es mejor factorizar el numerador y el denominador, para esta función racional se tiene

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + x - 3} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(2x + 3)(x - 1)}$$

Observe que la función racional no tiene factores comunes al numerador y al denominador, por lo que podemos realizar el análisis sin ningún problema.

- Para encontrar los interceptos con el eje x se encuentran los ceros del numerador y que no sean ceros del denominador, es decir

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 2) &= 0 \\ x &= -2, \quad x = 2\end{aligned}$$

Por lo tanto la gráfica corta al eje x en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$

Para encontrar el intercepto con el eje y se sustituye $x = 0$ y se obtiene el valor de y

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 4}{2(0)^2 + (0) - 3} = \frac{4}{3}$$

Entonces la gráfica intercepta al eje y en el punto $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

- Para las asíntotas verticales encontramos los ceros del denominador y que no sean ceros del numerador.

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x - 1) &= 0 \\ x &= -\frac{3}{2}, \quad x = 1\end{aligned}$$

Las asíntotas verticales de la función son las rectas $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$

- Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, es decir $n = m$, entonces la recta $y = \frac{a_n}{b_m} = \frac{1}{2}$ es la asíntota horizontal.

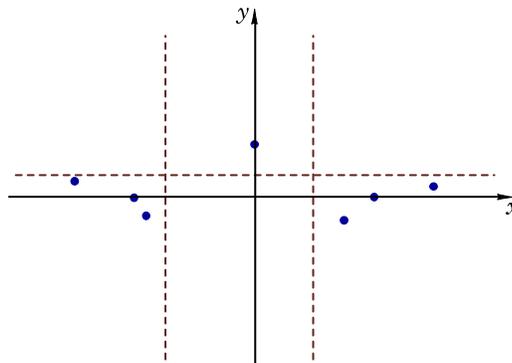
- d. La función no tiene agujeros ya que no hay números que sean simultáneamente ceros del numerador y del denominador.
- e. Los interceptos con el eje x y las asíntotas verticales dividen al eje x en los siguientes intervalos

$$(-\infty, -2), \left(-2, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, 1\right), (1, 2), (2, \infty)$$

Evaluando un valor de x en cada intervalo se obtiene la siguiente tabla de valores

x	-3	-1.8	0	1.5	3
y	0.417	-0.45	1.33	-0.58	0.278

Para dibujar la representación gráfica primero trace las asíntotas horizontales y verticales, los interceptos con los ejes de coordenadas y los puntos de la tabla de valores; como se muestra en la siguiente figura



Ahora trace una curva de izquierda a derecha en cada intervalo, tomando en cuenta que en cada uno de ellos la curva es positiva o es negativa, debe pasar por los puntos que se han dibujado y cuando la curva se aleja del origen se acerca a la asíntota. Si tiene dudas puede dibujar algunos puntos adicionales. El resultado es la gráfica siguiente

