PROBLEMA RESUELTO 1

Dada la función polinomial

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 24x - 8$$

a. Determine las posibles raíces racionales.

b. Use la regla de signos de Descartes determine la naturaleza de las raíces.

c. Encuentre todas las raíces del polinomio.

d. Exprese el polinomio como un producto de factores lineales.

Solución

a. Las posibles raíces racionales las encontramos calculando los factores de 8 dividiéndolos entre los factores de 1

$$\text{Posibles raíces racionales} = \frac{\text{factores de } 8}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8}{\pm 1}$$

De donde obtenemos que las posibles raíces racionales son

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

b. Para determinar el número de raíces positivas usamos las variaciones de signo de $f(x)$

$$f(x) = \underbrace{x^4 - 3x^3}_{1} - 20x^2 - 24x - 8$$

Como $f(x)$ tiene una variación de signo, la ecuación tiene exactamente una raíz positiva.

Para determinar el número de raíces negativas usamos las variaciones de signo de $f(-x)$

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^3 - 20(-x)^2 - 24(-x) - 8$$

$$f(-x) = x^4 \underbrace{+ 3x^3 - 20x^2}_{1} \underbrace{\,}_{2} \underbrace{+ 24x - 8}_{3}$$

Como $f(-x)$ tiene 3 variaciones de signo, el polinomio tiene 3 ceros negativos o bien 1 cero negativo.

Con la información anterior podemos construir una tabla que resume la naturaleza de las raíces

Positivas	Negativas	Complejas	Total
1	3	0	4
1	1	2	4

c. Por medio de división sintética encontramos los ceros racionales

Probando con $x = 4$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -3 & -20 & -24 & -8 & 4 \\ & 4 & 4 & -64 & -352 & \\ \hline 1 & 1 & -16 & -88 & -360 & \end{array}$$

Probando ahora con $x = 8$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -3 & -20 & -24 & -8 & 8 \\ & 8 & 40 & 160 & 1088 & \\ \hline 1 & 5 & 20 & 136 & 1080 & \end{array}$$

Observe que todos los números de la tercera fila en la última división son positivos, entonces 8 es una cota superior, es decir que no hay ceros mayores que 8.

Por otro lado, como los residuos tienen signos opuestos, podemos estar seguros que entre $x = 4$ y $x = 8$ hay una raíz, como ésta no es racional, tiene que ser irracional. Las raíces irracionales no se pueden encontrar de forma exacta utilizando división sintética.

Se buscará ahora los ceros negativos.

Probando con $x = -2$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -3 & -20 & -24 & -8 & -2 \\ & -2 & 10 & 20 & 8 & \\ \hline 1 & -5 & -10 & -4 & 0 & \end{array}$$

De donde $x = -2$ es un cero de del polinomio.

El polinomio original puede expresarse en forma factorizada como

$$f(x) = (x + 2)(x^3 - 5x^2 - 10x - 4)$$

Ahora se debe seguir trabajar con el polinomio reducido

$$f_1(x) = x^3 - 5x^2 - 10x - 4$$

Probando con $x = -4$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & -10 & -4 & -4 \\ & -4 & 36 & -104 & \\ \hline 1 & -9 & 26 & -108 & \end{array}$$

Como todos los números del tercer renglón se alternan en signo, el polinomio no tiene raíces menores que −4, es decir que −4 es una cota inferior.

Probando ahora con $x = -1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & -10 & -4 & -1 \\ & -1 & 6 & 4 & \\ \hline 1 & -6 & -4 & 0 & \end{array}$$

de donde $x = -1$ es un cero y el polinomio inicial puede factorizarse como

$$f(x) = (x + 2)(x + 1)(x^2 - 6x - 4)$$

El polinomio reducido $f_2(x) = x^2 - 6x - 4$ es de segundo grado y puede ser resuelto por medio de la fórmula general. Los otros dos ceros son

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-4)}}{(2)(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 3 \pm \sqrt{13}$$

De donde todos los ceros del polinomio son:

$$-2, \quad -1, \quad 3 + \sqrt{13} \quad \text{y} \quad 3 - \sqrt{13}$$

d. El polinomio factorizado como un producto de factores lineales es

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(x+1)\left(x - \left(3 + \sqrt{13}\right)\right)\left(x - \left(3 - \sqrt{13}\right)\right) \\ &= (x+2)(x+1)\left(x - 3 - \sqrt{13}\right)\left(x - 3 + \sqrt{13}\right) \end{aligned}$$