PROBLEMA RESUELTO 1

Resuelva las ecuaciones exponenciales

a. $5^{3x} = 40$ **b.** $200 = 800e^{-0.04x}$ **c.** $9^{2x-1} = 3^{x+2}$

Solución

a. Como la variable se encuentra solo en uno de los términos de la ecuación, ésta se puede resolver aplicando logaritmos de la misma base a ambos lados de la ecuación y luego utilizando las propiedades de los logaritmos para despejar x.

Se utilizarán logaritmos de base 10

$$5^{3x} = 40$$

$$\log\left(5^{3x}\right) = \log(40)$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos para trasladar la variable que se encuentra en el exponente a la base de la ecuación

$$3x\log 5 = \log(40)$$

Despejando x y utilizando una calculadora para evaluar el resultado se obtiene

$$x = \frac{\log 40}{3\log 5} \approx 0.7640$$

Para comprobar la respuesta se sustituye el valor encontrado en la ecuación dada

$$5^{3(0.7640)} = 40$$

$$5^{2.292} = 40$$

$$39.998 \approx 40$$

Como el valor satisface la ecuación dada, se concluye que la solución de la ecuación es

$$x = 0.7640.$$

b. Para resolver esta ecuación conviene aislar el término que contiene la incógnita antes de aplicar logaritmos

$$200 = 800e^{-0.04x}$$

$$\frac{200}{800} = e^{-0.04x}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-0.04x}$$

Ahora se aplican logaritmos naturales a ambos lados, ya que la incógnita está como exponente de la función exponencial natural; en seguida se utilizan propiedades de los logaritmos y se despeja la incógnita

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(e^{-0.04x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = (-0.04x)\ln e$$

Por la propiedad $\log_a a = 1$, se tiene que $\ln e = 1$, entonces

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -0.04x$$

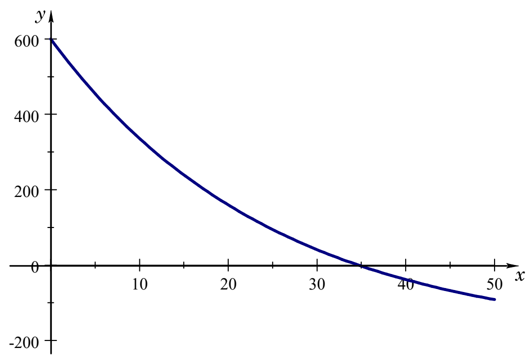
$$-0.04x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x = -\frac{1}{0.04}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

Al usar una calculadora para aproximar el resultado se tiene que $x \approx 34.657$

Si se dispone de una calculadora con la capacidad de dibujar gráficas o de un programa de cómputo matemático, es posible comprobar la respuesta dibujando la gráfica de la función $f(x) = 200 - 800e^{-0.04x}$.

El punto donde la gráfica intercepta al eje x debe coincidir con la solución obtenida por procedimientos algebraicos. La figura siguiente muestra la gráfica de la función $f(x) = 800e^{-0.04x} - 200$ dibujada con el programa Scientific Notebook, donde se puede ver que la solución obtenida es la correcta



c. En este caso la variable aparece en ambos lados de la ecuación, aun asi es posible utilizar el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores para resolverla, pues la ecuación solo tiene dos términos. Al aplicar logaritmos naturales y sus propiedades a ambos lados se tiene

$$9^{2x-1} = 3^{x+2}$$

$$\ln\left(9^{2x-1}\right) = \ln\left(3^{x+2}\right)$$

$$(2x-1)\ln 9 = (x+2)\ln 3$$

Desarrollando productos y trasladando los términos con la incógnita al lado izquierdo se tiene

$$2x\ln 9 - \ln 9 = x\ln 3 + 2\ln 3$$

$$2x\ln 9 - x\ln 3 = 2\ln 3 + \ln 9$$

Factorizando y despejando la incógnita para obtener la solución de la ecuación

$$x(2\ln 9 - \ln 3) = 2\ln 3 + \ln 9$$

$$x = \frac{2\ln 3 + \ln 9}{2\ln 9 - \ln 3}$$

La expresión anterior se puede evaluar con una calculadora o simplificarla un poco más utilizando propiedades de los logaritmos como se muestra a continuación

$$x = \frac{2\ln 3 + \ln 9}{2\ln 9 - \ln 3} = \frac{\ln 3^2 + \ln 9}{\ln 9^2 - \ln 3} = \frac{\ln(9 \cdot 9)}{\ln\left(\frac{81}{3}\right)} = \frac{\ln 81}{\ln 27} = \frac{\ln 3^4}{\ln 3^3} = \frac{4\ln 3}{3\ln 3} = \frac{4}{3}$$

Se deja al estudiante como ejercicio que haga la prueba para comprobar la respuesta.

La ecuación puede ser resuelta utilizando únicamente las leyes de los exponentes. Intente resolverla por este método.