PROBLEMA RESUELTO 6

Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 14x - 8y - 35 = 0$, y que pasa por el punto $(11,5)$. Dibuje la gráfica de la circunferencia y la recta en un mismo sistema de coordenadas.

Solución

Completando cuadrados para encontrar el centro y el radio de la circunferencia se tiene

$$x^2 + y^2 + 14x - 8y - 35 = 0$$

$$(x^2 + 14x) + (y^2 - 8y) = 35$$

$$(x^2 + 14x + 49) + (y^2 - 8y + 16) = 35 + 49 + 16$$

$$(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 100$$

Por lo que la circunferencia tiene centro en el punto $C(-7,4)$ y radio $r = \sqrt{100} = 10$

Ahora se comprobará si el punto $(11,5)$ se encuentra en la circunferencia, esto se hace sustituyendo $x = 11$ y $y = 5$ en la ecuación

$$(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 100$$

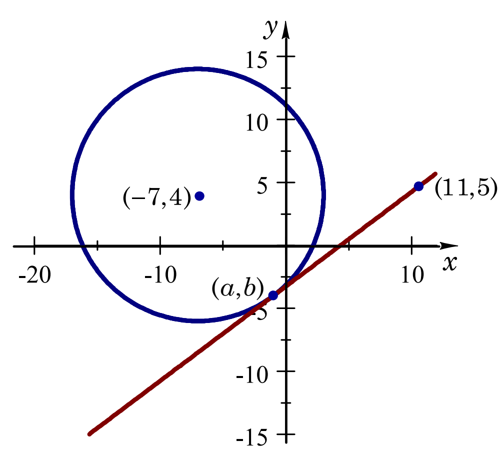
$$(11 + 7)^2 + (5 - 4)^2 = 100$$

$$289 + 1 = 100$$

$$290 = 100$$

Como se obtiene una proposición falsa, el punto $(11,5)$ no está en la circunferencia.

Sea $P(a,b)$ el punto donde la recta buscada toca a la circunferencia, como se ilustra en la gráfica siguiente



La pendiente de la recta que pasa por el punto P y por el centro C de la circunferencia es

$$m_1 = \frac{b - 4}{a - (-7)} = \frac{b - 4}{a + 7}$$

La pendiente de la recta que se está buscando es

$$m_2 = \frac{b-5}{a-11}$$

Como el radio y la tangente son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\left(\frac{b-4}{a+7}\right)\left(\frac{b-5}{a-11}\right) = -1$$

Al desarrollar productos y simplificar la ecuación anterior se obtiene

$$(b-4)(b-5) = -1(a+7)(a-11)$$

$$b^2 - 9b + 20 = -a^2 + 4a + 77$$

$$a^2 + b^2 - 4a - 9b + 20 = 0 \qquad (1)$$

El punto $P(a,b)$ está en la circunferencia, por lo tanto, satisface la ecuación de la misma, al sustituirlo en la ecuación se obtiene

$$x^2 + y^2 + 14x - 8y - 35 = 0$$

$$a^2 + b^2 - 14a - 8b - 35 = 0 \qquad (2)$$

Restando las dos ecuaciones 1 y 2

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + b^2 - 4a - 9b - 57 = 0 \\ \underline{a^2 + b^2 + 14a - 8b - 35 = 0} \end{array}\right| -$$

$$-18a - b - 22 = 0$$

Al despejar b se tiene que $b = -18a - 22$. Sustituyendo en la ecuación 1 y simplificando

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 14a - 8b - 35 &= 0 \\ a^2 + (-18a - 22)^2 + 14a - 8(-18a - 22) - 35 &= 0 \\ a^2 + 324a^2 + 792a + 484 + 14a + 144a + 176 - 35 &= 0 \\ 325a^2 + 950a + 625 &= 0 \\ 13a^2 + 38a + 25 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación anterior por fórmula general se obtiene el valor de a

$$a = \frac{-38 \pm \sqrt{(-38)^2 - 4(13)(25)}}{2(13)} = \frac{-38 \pm \sqrt{144}}{26} = \frac{-38 \pm 12}{26}$$

Por lo que a tiene dos valores que son $a = -1$ y $a = -\frac{25}{13}$, lo que indica que hay dos rectas que pasan por el punto $(11,5)$ y son tangentes a la circunferencia.

Para $a = -1$

$$b = -18a - 22 = -18(-1) - 22 = 18 - 22 = -4$$

El punto de tangencia es $(-1,-4)$.

Como ya se tienen dos puntos de la recta $(-1,-4)$ y $(11,5)$ se encuentra fácilmente que la ecuación de la recta tangente es

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x - 11)$$

$$4y - 20 = 3x - 33$$

$$3x - 4y - 13 = 0$$

Para $a = -\frac{25}{13}$

$$b = -18a - 22 = -18(-\frac{25}{13}) - 22 = \frac{450}{13} - 22 = \frac{164}{13}$$

El punto de tangencia es $\left(-\frac{25}{13}, \frac{164}{13}\right)$

La ecuación de la recta tangente es la que pasa por los puntos $\left(-\frac{25}{13}, \frac{164}{13}\right)$ y $(11,5)$

$$y - 5 = \frac{-33}{56}(x - 11)$$

$$33x + 56y - 643 = 0$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la circunferencia y las dos rectas tangentes.