3.4 Concepto de función

OBJETIVOS

- Evaluar funciones en números reales y expresiones algebraicas.
- Encontrar el dominio de una función.
- Reconocer si la gráfica de una ecuación es la gráfica de una función.
- Dibujar la gráfica de una función utilizando una tabla de valores.

El concepto de función es uno de los más importantes en matemática, ya que permite establecer una correspondencia entre dos conjuntos. Históricamente tuvo que pasar mucho tiempo para que los matemáticos encontraran una forma precisa de describir las relaciones que pueden existir entre los elementos de dos conjuntos. No fue sino hasta el siglo XIX que el matemático Guastave Dirichlet presentó la definición moderna del concepto función, como se conoce hoy en día.

Definición de función

Una función puede ser definida en diferentes contextos, el cuadro siguiente muestra dos definiciones equivalentes, en la primera se presenta como una regla entre conjuntos y en la segunda se presenta como un conjunto de pares ordenados.

Definición de función

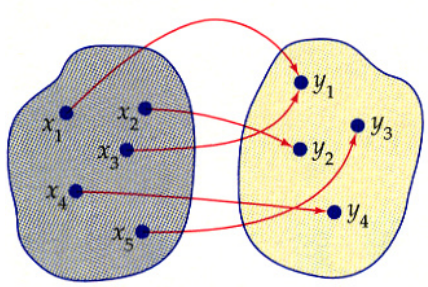
Una función *f* de un conjunto *D* a un conjunto *C* es una regla por medio de la cual se asigna a cada elemento *x* en *D*, uno y solo un elemento *y* en *C*.

Una función *f* de un conjunto *D* a un conjunto *C* es un conjunto de pares ordenados (x, y) tales que a cada elemento *x* en *D* uno y solo un elemento *y* en *C*.

Al conjunto *D* se le llama **Dominio** de la función. A la pareja *y* de un elemento *x* en *D* se le llama **imagen** de *x* en la función *f* y se representa como $y = f(x)$.

Al conjunto formado por todas las imágenes de los elementos *x* en el dominio de la función se le llama **rango** o **contradominio** de la función.

Por ejemplo, en la figura



El dominio es el conjunto $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y el rango o contradominio es el conjunto $C = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Una función se puede representar por medio de una fórmula, por medio de una tabla de valores, por medio de una gráfica o por medio de un conjunto de pares ordenados; aunque en éste curso se utilizan principalmente las primeras 3 formas.

Notación funcional

Considere la ecuación $d = 5t^2$ que indica que la distancia d recorrida por un objeto que cae libremente es igual a al producto de $5t^2$, en donde t es el tiempo transcurrido desde que el objeto comienza a caer. Como la distancia depende del tiempo transcurrido, se dice que d es una función de t y se expresa como

$$d = f(t) = 5t^2$$

En general una función se representa por una letra como f, g o h. Algunas funciones tienen nombres específicos como sen, tan, etc. Si x es un elemento del dominio de una función f entonces $f(x)$ (se lee f de x) es el elemento del rango de la función que corresponde al elemento del dominio x. Observe entonces que f es el nombre de la función y $f(x)$ es la imagen de x.

Evaluación de funciones

Para evaluar una función expresada por la ecuación $y = f(x)$, se sustituye el valor de x en la expresión dada y se efectúan las operaciones resultantes, el un número x, debe estar en el dominio. El ejemplo siguiente muestra cómo se evalúa una función.

Ejemplo 1: Evaluación de funciones

Dada la función $f(x) = 2x^2 - 3x$, evalúe

a. $f(-2)$ **b.** $f(3a)$ **c.** $3f(a)$ **d.** $f(a-2)$ **e.** $2f(a) - f(3)$

Solución

Asumiendo que todos los números en los cuales hay que evaluar la función están en su dominio se tiene

a. Para calcular $f(-2)$ se sustituye -2 en la expresión $2x^2 - 3x$ y se efectúan las operaciones resultantes

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) = 2(4) + 6 = 8 + 6 = 14$$

b. Se sustituye $3a$ por x en la expresión $2x^2 - 3x$

$$f(3a) = 2(3a)^2 - 3(3a) = 2(9a^2) - 9a = 18a^2 - 9a$$

c. Observe que en este caso el número 3 multiplica a $f(a)$

$$3f(a) = 3\left(2a^2 - 3a\right) = 6a^2 - 9a$$

d. Se sustituye $a - 2$ por x en la función y luego se simplifica

$$\begin{aligned} f(a-2) &= 2(a-2)^2 - 3(a-2) = 2(a^2 - 4a + 4) - 3a + 6 \\ &= 2a^2 - 8a + 8 - 3a + 6 \\ &= 2a^2 - 11a + 14 \end{aligned}$$

e. Observe que la función se evalúa 2 veces, en $x = a$ y en $x = 3$

$$\begin{aligned} 2f(a) - f(3) &= 2(2a^2 - 3a) - (2(3)^2 - 3(3)) \\ &= 4a^2 - 6a - (18 - 9) \\ &= 4a^2 - 6a - 9 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Evaluación de funciones

Dadas las funciones $f(x) = 4 - 2x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, evalúe y simplifique

a. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ **b.** $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

Solución

a. En este caso la función es $f(x) = 4 - 2x - x^2$. Evaluando la función en $x + h$ se tiene

$$f(x+h) = 4 - 2(x+h) - (x+h)^2$$

Restando las dos expresiones, dividiendo entre h y simplificando

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\left[4 - 2(x+h) - (x+h)^2\right] - \left[4 - 2x - x^2\right]}{h} \\ &= \frac{4 - 2x - 2h - x^2 - 2xh - h^2 - 4 + 2x + x^2}{h} \\ &= \frac{-2h - 2xh - h^2}{h} = \frac{h(-2 - 2x - h)}{h} \\ &= -2 - 2x - h \end{aligned}$$

b. Evaluando la función g en x y en $x + h$

$$g(x) = \frac{x^2}{x-2}, \qquad g(x+h) = \frac{(x+h)^2}{(x+h)-2}$$

Restando las dos expresiones, dividiendo entre h y simplificando

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{\dfrac{(x+h)^2}{(x+h)-2} - \dfrac{x^2}{x-2}}{h} = \frac{\dfrac{x^2 + 2xh + h^2}{x+h-2} - \dfrac{x^2}{x-2}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{(x^2 + 2xh + h^2)(x-2) - x^2(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)}}{\dfrac{h}{1}} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2h + h^2x - 2x^2 - 4xh - 2h^2 - x^3 - x^2h + 2x^2}{h(x+h-2)(x-2)} \\ &= \frac{x^2h + h^2x - 4xh - 2h^2}{h(x+h-2)(x-2)} = \frac{h(x^2 + hx - 4x - 2h)}{h(x+h-2)(x-2)} \\ &= \frac{x^2 + hx - 4x - 2h}{(x+h-2)(x-2)} \end{aligned}$$

Dominio de una función

Una función no está completamente determinada si no se da su dominio. El dominio es el conjunto de elementos que puede tomar la variable independiente x. Este conjunto puede estar formado por números naturales, enteros, reales o por cualquier conjunto de números que al ser evaluados en la regla de correspondencia que define la función de como resultado un número real.

Cuando no se especifica el dominio de una función, se asume que éste será el mayor subconjunto de números reales en el cual las imágenes obtenidas son números reales. En algunos libros de texto a éste conjunto se le llama **dominio natural de la función.**

Una vez especificado el dominio y la regla de correspondencia, el rango queda completamente determinado, y está formado por todos los valores de $f(x)$ para los cuales x está en el dominio de la función.

Dominio de una función
Si no se indica otra cosa, el dominio de una función estará formado por el subconjunto de números reales para el cual la función da como resultado un número real.

Ejemplo 3: Dominio de una función

Determine el dominio de las siguientes funciones

a. $f(x) = 2x - x^2$ **b.** $G(t) = \dfrac{t}{t-4}$ **c.** $H(x) = \sqrt{1-2x}$

d. $A(r) = \pi r^2$, donde $A(r)$ es el área de un círculo.

Solución

a. La función $f(x) = 2x - x^2$, solo involucra operaciones de resta, potencias y producto; estas operaciones se pueden realizar con todos los números reales. Por lo tanto el dominio de la función son todos los números reales, es decir que el dominio es el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b. La función $G(t) = \dfrac{t}{t-4}$, incluye en sus operaciones una división. Como la división entre 0 no está definida, cualquier valor de t, para el cual el denominador se haga cero no puede estar en el dominio. Cuando $t = 4$ el denominador es 0, por lo que $G(4)$ no está definida. Como $t = 4$ es el único número real en el que no se puede evaluar la función se concluye que el dominio está formado por todos los números reales excepto 4. Es decir que el dominio está formado por todos los números en el intervalo

$$(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

c. La función $H(x) = \sqrt{1-2x}$, incluye en sus operaciones la raíz cuadrada. Para que las imágenes sean números reales es necesario que la expresión dentro del radical sea mayor o igual a cero, ya que en otro caso el resultado es un número complejo, por lo tanto

$$1 - 2x \geq 0$$

Al resolver la desigualdad anterior se obtiene que $x \leq \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto el dominio de la función está formado por todos los números en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$.

d. La función $A(r) = \pi r^2$ está definida para todos los números reales, sim embargo como A representa el área de un círculo de radio r, es claro que el radio no puede tomar valores negativos. Por lo tanto el dominio de ésta función de uso práctico es $[0,\infty)$.

Ejemplo 4: Dominio de una función

Determine el dominio de las siguientes funciones

a. $g(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ **b.** $h(x) = \dfrac{\sqrt{3-2x}}{x^2 - x - 6}$

Solución

a. El dominio de la función $g(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ está formado por todos los números reales para los cuales $g(x)$ es un número real. Observe que si $x = 2$, el denominador de la función se hace cero, por lo tanto $x = 2$ no pertenece al domino de la función. De donde se concluye que el dominio de la función es

$$R - \{2\} \quad \text{o bien} \quad (-\infty,2) \cup (2,\infty)$$

b. Para obtener el dominio de la función $h(x) = \dfrac{\sqrt{3-2x}}{x^2 - x - 6}$, primero observe que la expresión dentro de un radical no puede ser negativa, es decir que $3 - 2x \geq 0$. Al resolver ésta desigualdad se tiene

$$3 - 2x \geq 0$$
$$-2x \geq -3$$
$$x \leq \frac{3}{2}$$

Por otro lado, el denominador no puede ser cero ya que la división entre cero no está definida, resolviendo la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ se obtienen los valores que hacen indefinida la función

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$

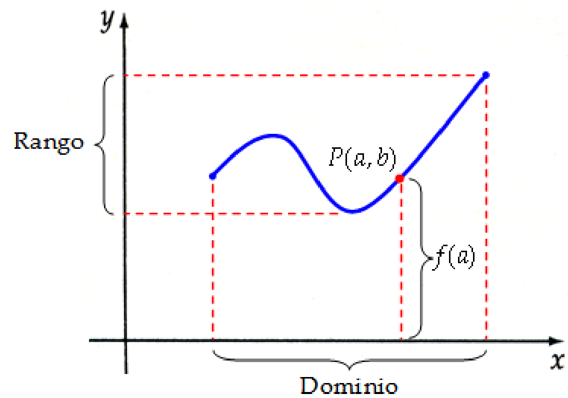
$x = 3$ y $x = -2$

Se concluye entonces que el dominio de la función está formado por todos los números menores o iguales a 3/2, excluyendo a 3 y −2, por lo que el dominio de la función h es

$$(-\infty,-2) \cup \left(-2, \frac{3}{2}\right]$$

Gráfica de una función

Si un elemento a está en el dominio de una función, entonces el punto $(a, f(a))$ está en la representación gráfica de la función cuya ecuación es $y = f(x)$, para todos los valores de x en el dominio de la función, es decir es la gráfica de todos los puntos de la forma (x, y), donde x está en el dominio de la función y y está en el rango de la misma. La figura siguiente muestra algunos elementos de la gráfica de una función

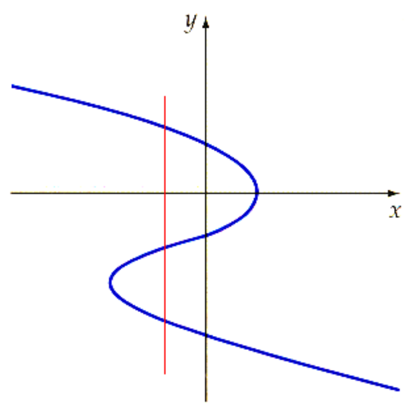


Prueba de la recta vertical

Para establecer si una representación gráfica en el plano representa la gráfica de una función $y = f(x)$ se utiliza la prueba de la recta vertical. Si bien ésta no es una prueba formal se puede utilizar para establecer cuando una gráfica corresponde a una función y cuando no

PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL
Una gráfica en el plano es la gráfica de una función si y solo si no existe recta vertical que la intercepte en más de un punto.

La figura siguiente muestra una gráfica que no corresponde a una función pues hay rectas verticales que interceptan la gráfica en 3 puntos



Ejemplo 5: Gráfica de una función

Dada la función $f(x) = \sqrt{2 - x}$

a. Encuentre su dominio.

b. Dibuje su representación gráfica.

c. Encuentre el rango de la función.

Solución

a. El dominio está dado por todos los números reales tales que $2 - x \geq 0$. Al resolver la desigualdad se obtiene que $x \leq 2$, es decir que el dominio es el intervalo $(-\infty, 2]$

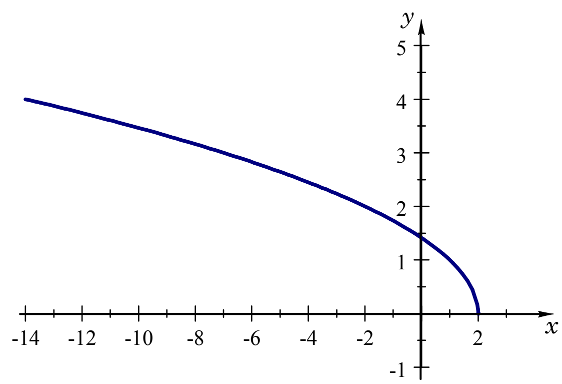
b. Para dibujar la gráfica se puede construir una tabla de valores asignando a x algunos valores en el dominio de la función. Por ejemplo al calcular la imagen de $x = -2$ se tiene

$$f(-2) = \sqrt{2 - (-2)} = \sqrt{4} = 2$$

La tabla que sigue muestra otros valores para los cuales se ha evaluado la función, note que los valores de x se han elegido de tal forma que las raíces son exactas.

x	2	1	−2	−7	−14
y	0	1	2	3	4

Al dibujar los puntos de la tabla se obtiene la gráfica de la función



Ejercicios de la sección 3.4

En los ejercicios 1 a 6 evalúe la función en los valores indicados y simplifique la respuesta

1. $f(x) = 3x - 2$

a. $f(2)$ **b.** $f(-1)$ **c.** $f(0)$

d. $f\left(\frac{2}{3}\right)$ **e.** $f(k)$ **f.** $f(k-2)$

2. $g(x) = 3x^2 + 5$

a. $g(3)$ **b.** $g(-1)$ **c.** $g(0)$

d. $g\left(\frac{3}{2}\right)$ **e.** $g(a)$ **f.** $g(a+2)$

3. $g(x) = 3x^2 + 5$

a. $g(3)$ **b.** $g(-1)$ **c.** $g(0)$

d. $g\left(\frac{3}{2}\right)$ **e.** $g(a)$ **f.** $g(a+2)$

4. $A(r) = \sqrt{r^2 + 5}$

a. $A(0)$ **b.** $A(2)$ **c.** $A(10)$

d. $A\left(\frac{3}{2}\right)$ **e.** $A(r+1)$ **f.** $A(r+h)$

5. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

a. $f(2)$ **b.** $f(-1)$ **c.** $f(0)$

d. $f\left(\frac{2}{3}\right)$ **e.** $f(k), k > 0$ **f.** $f(k), k < 0$

6. $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$

a. $f(2)$ **b.** $f(-1)$ **c.** $f(0)$

d. $f\left(\frac{2}{3}\right)$ **e.** $f(k-1)$ **f.** $f(a+h)$

En los ejercicios 7 a 10 si a y h son números reales calcule $f(a)$, $f(a+h)$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ y simplifique la respuesta

7. $f(x) = 2x - 5$

8. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

9. $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

10. $f(x) = \sqrt{x+1}$

En los ejercicios 11 a 20 encuentre el dominio de la función

11. $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$

12. $g(x) = \dfrac{x}{2x+5}$

13. $h(x) = \sqrt{x+4}$

14. $f(x) = \sqrt{7-3x}$

15. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

16. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x^2-3x}$

18. $g(x) = \dfrac{\sqrt{5x-2}}{\sqrt{5-2x}}$

19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$

20. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{2x^2-5x-3}$

En los ejercicios 21 a 32 trace la gráfica de la función. Encuentre el dominio y el rango de f

21. $f(x) = 2x+3$

22. $f(x) = 5-3x$

23. $f(x) = x^2-1$

24. $f(x) = 9-3x^2$

25. $f(x) = \sqrt{x-2}$

26. $f(x) = \sqrt{3-x}$

27. $f(x) = |x-1|$

28. $f(x) = |x|+2$

29. $f(x) = -2$

30. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

31. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

32. $f(x) = -\sqrt{25-x^2}$